ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ 1

Έστω δύο μεταβλητά μεγέθη x, y και $\mathrm{y} = \mathrm{f}(x)$, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο α, τότε ονομάζουμε ΡΥΘΜΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ του y ως προς x στο α την παράγωγο $\mathrm{f}'(\alpha)$

- Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης θέσης s ενός σώματος που κινείται πάνω σε έναν άξονα ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t_0
  Δηλαδή $\upsilon(\mathrm{t}_0) = \mathrm{s}'(\mathrm{t}_0)$

- Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός σόνη ώματος ως προς
  Το χρόνο t λέγεται επιτάχυνση και συμβολίζεται με $\alpha(\mathrm{t})$
  δηλαδή $\alpha(\mathrm{t}) = \upsilon'(\mathrm{t}) = \mathrm{s}''(\mathrm{t})$

- Όταν λέμε ότι ο ρυθμός μεταβολής **αυξάνεται** ή όταν λέμε « **ο ρυθμός αύξησης** » σημαίνει ότι είναι **θετικός**

ή

- Όταν λέμε ότι ο ρυθμός μεταβολής **μειώνεται** ή όταν λέμε « **ο ρυθμός μείωσης** » σημαίνει ότι είναι **αρνητικός**

1.1 Η περίμετρος ενός τετραγώνου αυξάνεται με ρυθμό $16\,\text{cm}/\sec$. Να βρείτε

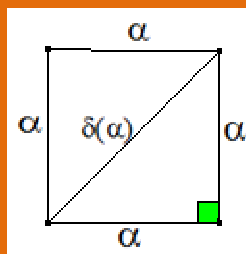
(α) Τον ρυθμό μεταβολής της πλευράς του τετραγώνου
(β) Τον ρυθμό μεταβολής της διαγωνίου του τετραγώνου
(γ) Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τετραγώνου **όταν** η διαγώνιος του είναι $\sqrt{3}$ cm

Στο τετράγωνο πλευράς α

Η περίμετρος είναι $\Pi = 4\alpha$

Η διαγώνιος του είναι $\delta = \alpha\sqrt{2}$ cm

Το εμβαδόν είναι $E = \alpha^2$



ενδεικτική απάντηση

Έστω $\alpha(t), \Pi(t), \delta(t), E(t)$ οι συναρτήσεις ως προς το t της πλευράς , της περιμέτρου , της διαγωνίου και του εμβαδού του τετραγώνου , οπότε

$$\Pi(t) = 4\alpha(t)\ ,\ \delta(t) = \alpha(t)\sqrt{2}\ ,\ E(t) = (\alpha(t))^2$$

Δίνεται ότι $\Pi'(t) = 16\,\text{cm}/\sec$

(α) $\Pi'(t) = 4\alpha'(t) \Rightarrow 4\alpha'(t) = 16 \Rightarrow \alpha'(t) = 4\,\text{cm}/\sec$

(β) $\delta(t) = \alpha(t)\sqrt{2} \Rightarrow \delta'(t) = \alpha'(t)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\ \text{cm}/\sec$

(γ) t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία $\delta(t_0) = \sqrt{3}$,τότε

$$\delta(t_0) = \alpha(t_0)\sqrt{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$E'(t) = 2\alpha(t)\alpha'(t) \Rightarrow E'(t_0) = 2\alpha(t_0)\alpha'(t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E'(t_0) = 4\sqrt{6}\ \text{cm}^2/\sec$$

1.2 Η διάσταση x ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου αυξάνεται με ρυθμό $5\,\mathrm{cm/sec}$ ενώ η διάσταση y μειώνεται με ρυθμό $4\,\mathrm{cm/sec}$.Να βρείτε

(α) Τον ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου

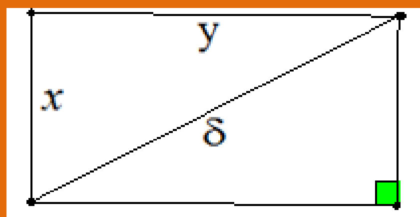
(β) Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, **όταν** $x = 2\mathrm{cm}$ και $y = 4\,\mathrm{cm}$

(γ) Τον ρυθμό μεταβολής της διαγωνίου δ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου , **όταν** $x = 4\,\mathrm{cm}$ και $y = 3\mathrm{cm}$

Περίμετρος $\Pi = 2x + 2y$

Διαγώνιος $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$

Εμβαδόν $E = xy$



ενδεικτική απάντηση

Έστω $x(t), y(t), \Pi(t), \delta(t), E(t)$ οι συναρτήσεις ως προς το t των πλευρών, της περιμέτρου , της διαγωνίου και του εμβαδού του παραλληλογράμμου ,άρα $\Pi(t) = 2x(t) + 2y(t)$,

$\delta(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$, $E(t) = x(t)y(t)$

Δίνεται ότι $x'(t) = 5\,\mathrm{cm/sec}$ και $y'(t) = -4\,\mathrm{cm/sec}$

(α) $\Pi'(t) = 2x'(t) + 2y'(t) = 10 - 8 = 2\ \mathrm{cm/sec}$

(β) t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία $x(t_0) = 2$ και $y(t_0) = 4$,τότε $E'(t_0) = x'(t_0)y(t_0) + x(t_0)y'(t_0) = 12\ \mathrm{cm^2/sec}$

$$\delta'(t_0) = \frac{x'(t_0)x(t_0) + y'(t_0)y(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)}} = -\frac{1}{5}\ \mathrm{cm/sec}$$

1.3 Η συνάρτηση της ακτίνας R ενός κύκλου C ως προς το χρόνο t δίνεται από τον τύπο $R(t)=\sqrt{4-\ln t}$, cm/sec $0<t\le 4$

(1) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ακτίνας R σε κάθε χρονική στιγμή t

(2) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ του κύκλου C τη χρονική στιγμή $t_0=2\ sec$

(3) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής ττης ακτίνας όταν , το εμβαδόν $E(t)$ είναι $4\pi\ cm^2$

ενδεικτική απάντηση

(1) Ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας R είναι $R^{/}(t)$

$$R^{/}(t)=\frac{-1}{2t\sqrt{4-\ln t}}\ ,cm/sec$$

(2) Το εμβαδόν $E(t)$ είναι $E(t)=\pi R^2(t)$,ο ρυθμός μεταβολής του $E(t)$ είναι $E^{/}(t)=(\pi R^2(t))^{/}$

$$E^{/}(t)=2\pi R(t)R^{/}(t)=-\frac{\sqrt{4-\ln t}}{t\sqrt{4-\ln t}}=-\frac{1}{t}\ cm^2/sec$$

Οπότε ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ του κύκλου C τη χρονική στιγμή $t_0=2\ sec$ είναι

$$E^{/}(2)=-\frac{1}{2}\ cm^2/sec$$

(3) Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία $E(t_0)=4\pi\Rightarrow$,

$\Rightarrow\pi R^2(t_0)=4\pi\Rightarrow R(t_0)=2$ άρα $\sqrt{4-\ln t_0}=2\Rightarrow$

$\Rightarrow 4-\ln t_0=4\Rightarrow \ln t_0=0\Rightarrow t_0=1$

$$R^{/}(1)=-\frac{1}{4}\ cm/sec$$

1.4 Η διαγώνιος ενός τετραγώνου ελαττώνεται με ρυθμό $1\text{cm}/\sec$. Να βρείτε

(α) Τον ρυθμό μεταβολής της πλευράς του τετραγώνου

(β) Τον ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του τετραγώνου

(γ) Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τετραγώνου, όταν η περίμετρος του είναι $16\,\text{cm}$

1.5 Η περίμετρος ενός τετραγώνου αυξάνεται με ρυθμό $36\,\text{cm}/\sec$. Αν ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τετραγώνου είναι $9\,\text{cm}^2/\sec$, τότε να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου τη χρονική στιγμή $t_0 = 0,5$

1.6 Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου αυξάνονται με ρυθμούς $4\,\text{cm}/\sec$ και $3\,\text{cm}/\sec$. Αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 1$, η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι $20\,\text{cm}$, ενώ ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι $34\text{cm}^2/\sec$, τότε να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου τη χρονική στιγμή $t_0 = 2$.

1.7 Η ακτίνα R ενός κύκλου αυξάνεται με ρυθμό $2\,cm/sec$.
Να βρείτε

(α) Τον ρυθμό μεταβολής του μήκους του κύκλου

(β) Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του κύκλο

, όταν η ακτίνα είναι $1cm$

1.8 Το μήκος ενός κύκλου αυξάνεται με ρυθμό $8\pi\,cm/sec$.

Να βρείτε

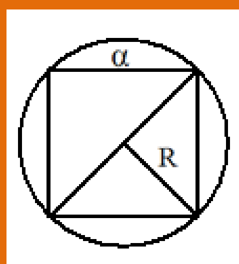
(α) Τον ρυθμό μεταβολής της ακτίνας του κύκλου.

(β) Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του κύκλου

όταν η ακτίνα του κύκλου είναι $5cm$.

1.9 Να βρείτε το εμβαδόν κύκλου C , τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το μέτρο του ρυθμού μεταβολής του εμβαδού του, ισούται με το μέτρο του ρυθμού μεταβολής του μήκους του.

1.10 Δίνεται κύκλος C ακτίνας R και τετράγωνο εγγεγραμμένο σε αυτόν. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του χωρίου Ω που βρίσκεται εκτός του τετραγώνου και εντός του κύκλου ,όταν η ακτίνα του κύκλου είναι $\sqrt{2}$ και η πλευρά του τετραγώνου αυξάνεται με ρυθμό $\sqrt{2}\,cm/sec$.

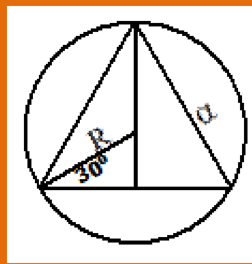


$\alpha = R\sqrt{2}$

Εμβαδόν κύκλου $= \pi R^2$

Μήκος κύκλου $= 2\pi R$

1.11 Δίνεται κύκλος C και ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε αυτόν. Η πλευρά του τριγώνου μειώνεται με ρυθμό $3\mathrm{cm}/\sec$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του χωρίου Ω, το οποίο βρίσκεται εκτός του τριγώνου και εντός του κύκλου ,όταν το μήκος του κύκλου είναι 4π.



$\alpha = R\sqrt{3}$

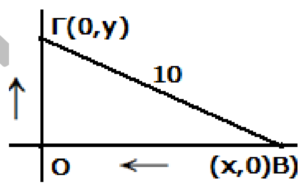
ύψος $= \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

Ε.τργ $= \dfrac{\beta\alpha\sigma\eta \mathrm{X} \upsilon\psi o\varsigma}{2}$

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ 2

2.1 Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων δίνονται τα σημεία B,Γ με $\mathrm{B\Gamma}=10$ μον. , τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το σημείο B βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα $\mathrm{O}y$ ενώ το σημείο Γ ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων $\mathrm{O}(0,0)$.
Το σημείο Γ απομακρύνεται από το $\mathrm{O}(0,0)$, κινούμενο στον θετικό ημιάξονα $\mathrm{O}x$ με ρυθμό $2\,\mu o\nu/\sec$ και το σημείο B πλησιάζει το σημείο $\mathrm{O}(0,0)$ κινούμενο στον θετικό ημιάξονα $\mathrm{O}y$ με ρυθμό $1\,\mu o\nu/\sec$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{OB\Gamma}$, τη χρονική στιγμή $t_0=2$.

ενδεικτική απάντηση



Έστω $x(t)$, $y(t)$, $E(t)$ οι συναρτήσεις ως προς το χρόνο t των x,y και του εμβαδού $E=\frac{xy}{2}$ του ορθογωνίου τριγώνου $\Gamma\mathrm{OB}$, από το πυθαγόρειο

$x^2+y^2=100 \Rightarrow x^2(t)+y^2(t)=100$ και $E(t)=\frac{x(t)y(t)}{2}$

$y'(t)=2$ και $x'(t)=-1$, και $x(t)x'(t)+y(t)y'(t)=0 \Rightarrow$
$-x(t)+2y(t)=0$.

Τη χρονική στιγμή $t_0=2$, έχουμε

$$x(t_0)=2y(t_0) \text{ και } x^2(t_0)+y^2(t_0)=100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2(t_0)=20 \Rightarrow y(t_0)=2\sqrt{5} \Rightarrow x(t_0)=4\sqrt{5}$$

Άρα $E(t_0)=\frac{x(t_0)y(t_0)}{2}=20\,\tau\mu$

2.2 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2$ και το σημείο $M(x,y)$ της γραφικής παράστασης C_f , με $x>0$

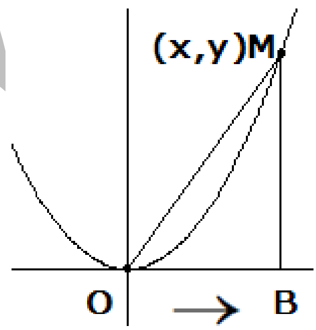
Η τετμημένη του σημείου $M(x,y)$ αυξάνεται με ρυθμό $2\mu o\nu / \sec$. B η προβολή του M στον άξονα $x'x$

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E του τριγώνου OMB, όταν $x=1$.

ενδεικτική απάντηση

Έστω $x(t)$, $y(t)$, $E(t)$ οι συναρτήσεις ως προς το χρόνο t των x, y και του εμβαδού E ,τότε $y=x^2 \Rightarrow y(t)=x^2(t)$

$$E=\frac{MB\cdot OB}{2} \Rightarrow E(t)=\frac{x(t)\cdot y(t)}{2}$$



$$x'(t)=2 \Rightarrow y'(t)=2x(t)x'(t)$$

t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία

$$x(t_0)=1 \Rightarrow y(t_0)=1^2=1 \text{ και}$$

$$y'(t_0)=2x(t_0)x'(t_0)=4$$

$$E'(t)=\frac{x'(t)\cdot y(t)+x(t)\cdot y'(t)}{2}$$

$$E'(t_0)=\frac{x'(t_0)\cdot y(t_0)+x(t_0)\cdot y'(t_0)}{2}$$

άρα $E'(t_0)=3\,\tau.\mu / \sec$

2.3 Δίνεται η συνάρτηση f , με $\mathrm{f}(x)=1/x$, $x>0$

Η τετμημένη του σημείου $\mathrm{M}(x,\mathrm{y})$ της C_{f} αυξάνεται με ρυθμό $2\mu o\nu/\sec$.και τα σημεία $\mathrm{B}(0,\mathrm{y}_{\mathrm{M}})$, $\Gamma(x_{\mathrm{M}},0)$

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής , όταν $x_{\mathrm{M}}=2$

(α) Της τεταγμένης του σημείου M

(β) Της περιμέτρου του παραλληλογράμμου $\mathrm{OBM\Gamma}$

(γ) Του εμβαδού του παραλληλογράμμου $\mathrm{OBM\Gamma}$

(δ) Της διαγωνίου του παραλληλογράμμου $\mathrm{OBM\Gamma}$

2.4 Έστω η συνάρτηση f με $\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{x}$, $x>0$ και το σημείο

Η τετμημένη του σημείου M της C_{f} αυξάνεται με ρυθμό $2\mu o\nu/\sec$.Αν B η προβολή του M στον άξονα $x'x$ και Γ η προβολή του M στον άξονα $\mathrm{y}'\mathrm{y}$,τότε

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής , όταν $x_{\mathrm{M}}=1$

(α) Της τεταγμένης του σημείου M

(β) Της περιμέτρου του παραλληλογράμμου $\mathrm{OBM\Gamma}$

(γ) Του εμβαδού του παραλληλογράμμου $\mathrm{OBM\Gamma}$

(δ) Της διαγωνίου του παραλληλογράμμου $\mathrm{OBM\Gamma}$

2.5 Δίνεται η συνάρτηση f , με $\mathrm{f}(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $x>0$

Η τετμημένη του σημείου $\mathrm{M}(x,\mathrm{y})$ της $C_{\mathrm{f}'}$ αυξάνεται με ρυθμό $2\mu o\nu/\sec$.και τα σημεία $\mathrm{B}(0,\mathrm{y}_{\mathrm{M}})$, $\Gamma(x_{\mathrm{M}},0)$

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής , όταν $x_{\mathrm{M}}=2$

(α) Της τεταγμένης του σημείου M

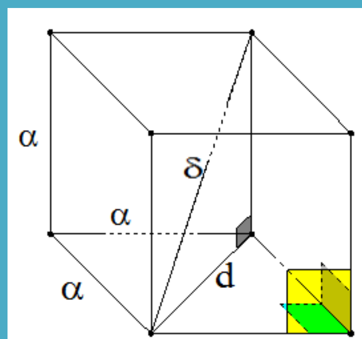
(β) Της περιμέτρου του παραλληλογράμμου $\mathrm{OBM\Gamma}$

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ 3

3.1 Η ακμή ενός κύβου αυξάνεται με ρυθμό $2\text{cm}/\sec$.
Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου του όταν ο ρυθμός μεταβολής της ολικής επιφάνειας του κύβου είναι $96\text{cm}^2/\sec$

Κύβος

- Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $E_{\pi\rho} = 4\alpha^2$
- Εμβαδόν ολικής επιφάνειας $E_{o\lambda} = 6\alpha^2$
- Όγκος $V = \alpha^3$
- Διαγώνιος $d = \alpha\sqrt{2}$
- Διαγώνιος $\delta = \alpha\sqrt{3}$



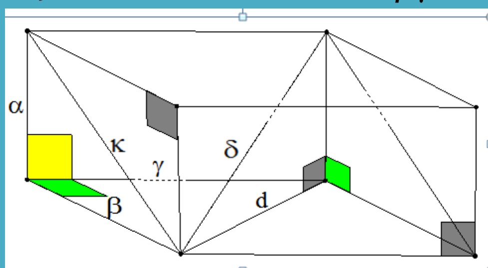
ενδεικτική απάντηση

- Έστω $\alpha(t), E(t), V(t)$ οι συναρτήσεις ως προς το χρόνο t της ακμής α ,του εμβαδού $E_{o\lambda}$ της ολικής επιφάνειας και V ο όγκος του κύβου ,τότε
- $E(t) = 6\alpha^2(t)$ **και** $V(t) = \alpha^3(t)$ **δίνεται** $\alpha'(t) = 2\text{cm}/\sec$
- t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία $E'(t_0) = 96\ \text{cm}^2/\sec$ ακμής α ,του εμβαδού $E_{o\lambda}$ της ολικής επιφάνειας ,όμως
$E'(t) = 12\alpha(t)\alpha'(t) \Rightarrow E'(t_0) = 12\alpha(t_0)\alpha'(t_0)$, οπότε
$96 = 24\alpha(t_0) \Rightarrow \alpha(t_0) = 4$
$V'(t) = 3\alpha^2(t)\alpha'(t) \Rightarrow V'(t_0) = 3\alpha^2(t_0)\alpha'(t_0)$, άρα
$V'(t_0) = 3\cdot 4^2 \cdot 2 = 96\ \text{cm}^3/\sec$

3.2 Ο ρυθμός μεταβολής των διαστάσεων ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου τη χρονική στιγμή t_0 είναι $2\ \text{cm}/\sec$. Να αποδείξετε ότι το μέτρο του ρυθμού μεταβολής του όγκου του τη χρονική στιγμή t_0, ισούται με το μέτρο του εμβαδού της ολικής επιφάνειας του παραλληλεπιπέδου.

Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

- Εμβαδόν παράπλευρης $E\pi\rho = 2(\alpha\beta + \alpha\gamma)$
- Εμβαδόν ολικής $E o\lambda = 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)$
- Όγκος $V = \alpha\beta\gamma$



Διαγώνιοι $\kappa = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $d = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$, $\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$

ενδεικτική απάντηση

- Έστω $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$, $E(t)$, $V(t)$ οι συναρτήσεις ως προς το χρόνο t των διαστάσεων α, β, γ της ολικής επιφάνειας και του όγκου V του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ,τότε
$E(t) = 2(\alpha(t)\beta(t) + \beta(t)\gamma(t) + \gamma(t)\alpha(t))$ και επιπλέον
$V(t) = \alpha(t)\beta(t)\gamma(t)$,ο ρυθμός μεταβολής του $V(t)$ είναι

$$V'(t) = \alpha'(t)\beta(t)\gamma(t) + \alpha(t)\beta'(t)\gamma(t) + \alpha(t)\beta(t)\gamma'(t)$$

t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = \gamma(t_0) = 2$

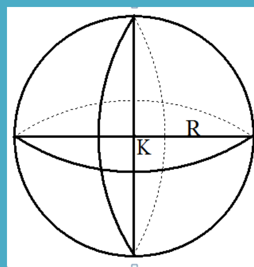
τότε $V'(t_0) = 2(\beta(t_0)\gamma(t_0) + \alpha(t_0)\gamma(t_0) + \alpha(t_0)\beta(t_0))$

οπότε $V'(t_0) = E(t_0)$

3.3 Η ακτίνα R μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $3\ \text{cm}/\text{sec}$.
Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας της σφαίρας όταν η $R=1\ \text{cm}$ και στη συνέχεια να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου της σφαίρας όταν $R=2\ \text{cm}$

Σφαίρα

- Επιφάνεια σφαίρας $E\sigma\varphi = 4\pi R^2$
- Όγκος σφαίρας $V=\frac{4}{3}\pi R^3$



ενδεικτική απάντηση

- Έστω $R(t), E(t), V(t)$ οι συναρτήσεις ως προς το χρόνο t της ακτίνας R, της επιφάνειας $E\sigma\varphi$ και του όγκου V της σφαίρας, τότε $E(t)=4\pi R^2(t)$ και $V(t)=\frac{4}{3}\pi R^3(t)$

Δίνεται ότι $R'(t)=3\ \text{cm}/\text{sec}$

- t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία $R(t_0)=1\text{cm}$

  $E'(t)=8\pi R(t)R'(t) \Rightarrow E'(t_0)=8\pi R(t_0)R'(t_0)$

  οπότε $E'(t_0)=8\pi\cdot 1\cdot 3=24\pi\ \text{cm}^2/\text{sec}$
- t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία $R(t_0)=2\text{cm}$

  $V'(t)=4\pi R^2(t)R'(t) \Rightarrow V'(t_0)=4\pi R^2(t_0)R'(t_0)$

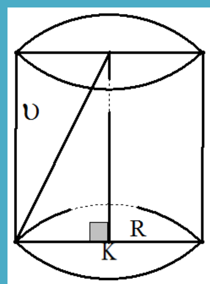
  οπότε $V'(t_0)=4\pi\cdot 2^2\cdot 3=48\pi\ \text{cm}^3/\text{sec}$

3.4 Το ύψος ενός κυλίνδρου είναι διπλάσιο από την ακτίνα του η οποία αυξάνεται με ρυθμό μεταβολής $1\ \mathrm{cm/sec}$.
Όταν η ακτίνα είναι $2\mathrm{cm}$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής

(α) Της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου.
(β) Της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου
(γ) Του όγκου του κυλίνδρου.

Κύλινδρος

- Εμβαδόν κυρτής $E_\kappa = 2\pi R\upsilon$
- Εμβαδόν ολικής $E_{o\lambda} = 2\pi R(R+\upsilon)$
- Όγκος $V = \pi R^2 \upsilon$



ενδεικτική απάντηση

- Έστω $\upsilon(t), R(t), E\kappa(t), E(t), V(t)$ οι συναρτήσεις ως προς το χρόνο t του ύψους υ, της ακτίνας R, της κυρτής επιφάνειας $E\kappa$, της ολικής επιφάνειας $E_{o\lambda}$ και του όγκου V του κυλίνδρου, τότε $\upsilon(t)=2R(t)$, $E\kappa(t)=2\pi R(t)\upsilon(t)$
$E(t)=2\pi R(t)(R(t)+\upsilon(t))$ και $V(t)=\pi R^2(t)\upsilon(t)$
$\upsilon'(t)=2R'(t)$, $R'(t)=1\ \mathrm{cm/sec}$, άρα $\upsilon'(t)=2\ \mathrm{cm/sec}$
- t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία $R(t_0)=2\mathrm{cm}$

(α) $E'\kappa(t_0)=2\pi(R'(t_0)\upsilon(t_0)+R(t_0)\upsilon'(t_0))=20\pi\ \mathrm{cm^2/sec}$

(β) $E'(t_0)=2\pi[R'(t_0)(R(t_0)+\upsilon(t_0))+R(t_0)(R'(t_0)+\upsilon'(t_0)]$
Οπότε $E'(t_0)=24\pi\ \mathrm{cm^2/sec}$

(γ) $V'(t_0)=\pi[2R(t_0)R'(t_0)\upsilon(t_0)+R^2(t_0)\upsilon'(t_0)]$, οπότε
$V'(t_0)=24\pi\ \mathrm{cm^3/sec}$

3.5 Η ολική επιφάνεια ενός κύβου μειώνεται με ρυθμό $24cm^2 / sec$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου του τη χρονική στιγμή $t_0 = 1$ που το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κύβου είναι $24 cm^2$.

3.6 Να βρείτε τον όγκο ενός κύβου, τη χρονική στιγμή που ο όγκος του και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κύβου ,έχουν τον ίδιο ρυθμό μεταβολής.

3.7 Ο ρυθμός αύξησης της ακμή ενός κύβου είναι $2\ cm / sec$.

Να βρείτε

(α) Τον ρυθμό μεταβολής της διαγωνίου δ_1 του κύβου και της διαγωνίου δ_2 μιας έδρας του.

(β) Τον ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας του κύβου, όταν η ακμή του είναι $4 cm$.

(γ) Τον ρυθμό μεταβολής του όγκου του κύβου, όταν η ακμή του είναι $2 cm$.

3.8 Η βάση ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι τετράγωνο. Αν το ύψος του αυξάνεται με ρυθμό $2\ cm / sec$ ενώ η ακμή της βάσης μειώνεται με ρυθμό $1\ cm / sec$,τότε να βρείτε τον όγκο του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου τη χρονική στιγμή t_0 ,που το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ολικής του επιφάνειας ,ισούται με το μέτρο του ρυθμού μεταβολής του όγκου του.

3.9 Η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $16\,cm^2\,/\,sec$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής

(α) Της ακτίνας της σφαίρας όταν το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας είναι $4\pi\,cm^2$

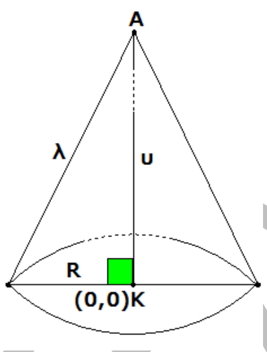
(β) Του όγκου της σφαίρας όταν η ακτίνα είναι $2\ cm$.

3.10 Ο όγκος μιας σφαίρας ελαττώνεται με ρυθμό $4\pi\ cm^2\,/\,sec$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής

(α) Της ακτίνας της σφαίρας όταν ο όγκος της σφαίρας είναι $32\pi\,/\,cm^3$

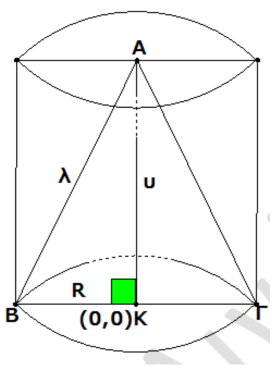
(β) Της επιφάνειας της σφαίρας όταν η ακτίνα είναι $2cm$.

Κώνος και Κύλινδρος



Κώνος

- Εμβαδόν κυρτής $E_\kappa = \pi R \lambda$
- Εμβαδόν ολικής $E_{o\lambda} = \pi R \lambda + \pi R^2$
- Όγκος $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \upsilon$



Κύλινδρος

- Εμβαδόν κυρτής $E_\kappa = 2\pi R \upsilon$
- Εμβαδόν ολικής $E_{o\lambda} = 2\pi R(R+\upsilon)$
- Όγκος $V = \pi R^2 \upsilon$

3.11 Έστω κύλινδρος του οποίου το ύψος βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα Oy και το κέντρο της βάσης του στην αρχή των αξόνων και ο εγγεγραμμένος στον κύλινδρο κώνος.

Α (α1) Να βρείτε τον όγκο V του στερεού που περικλείεται από τον κύλινδρο και τον κώνο.

(α2) Να βρείτε την ολική επιφάνεια E του στερεού που περικλείεται από τον κύλινδρο και τον κώνο.

Β. Το σημείο A απομακρύνεται από το σημείο K κινούμενο στον θετικό ημιάξονα Oy με ρυθμό $2\mu o\nu/\sec$ ενώ η ακτίνα αυξάνεται με ρυθμό $4\mu o\nu/\sec$. Όταν $R = 3$ και $\upsilon = 4$

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής

(β1) Της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου

(β2) Του λ

(β3) Της ολικής επιφάνειας του κώνου

(β4) Του όγκου του κυλίνδρου

(β5) Του όγκου του κώνου

(β6) Της ολικής επιφάνειας E του στερεού που περικλείεται από τον κύλινδρο και τον κώνο.

(β7) Του όγκου V του στερεού που περικλείεται από τον κύλινδρο και τον κώνο.