

**ΘΕΜΑ 21**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με  $f(x) = x^2 + \sigma\upsilon\nu x + 1 + \ln(x+1)$

- (ε 1) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία
- (ε 2) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα
- (ε 3) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$

**ΘΕΜΑ 22**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $\varphi$ ,  $f$ , με  $\varphi(x) = x(1 + \ln x) - (x+1)\ln(x+1)$

και  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{1 + \ln x}$

- (ε 1) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $\varphi$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $\varphi$
- (ε 2) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία
- (ε 3) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $y_0 \in \Delta = (-\infty, 0) \cup$   
υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in A_f$ , ώστε  $f(x_0) = y_0$

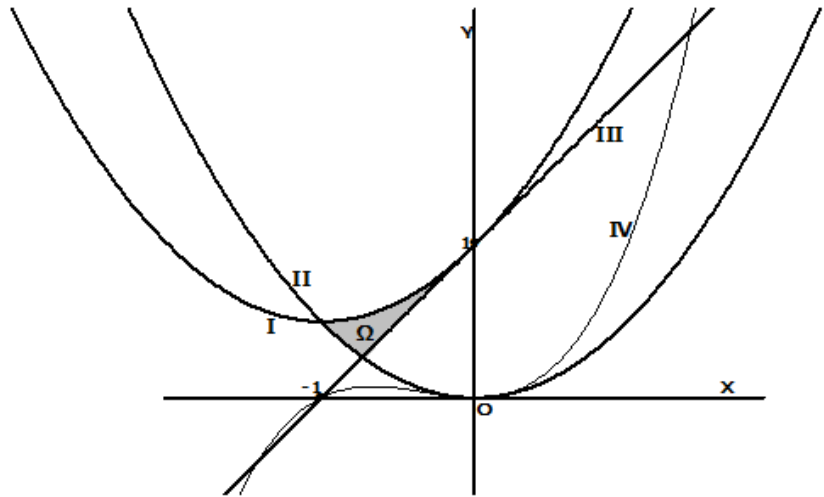
**ΘΕΜΑ 23**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με  $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+6} + \sqrt{x+5}}$

- (ε 1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- (ε 2) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$
- (ε 3) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $y_0 \in (-\infty, 0)$  υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in A_{f'}$ , ώστε  $f'(x_0) = y_0$

**ΘΕΜΑ 24**

Κάθε μια από της γραμμές I, II, III, IV είναι η γραφική παράσταση μιας μόνο από τις πολυωνυμικές συναρτήσεις  $f, g, f + g, f \cdot g$  και μια μόνο από τις  $f, g, f + g, f \cdot g$  είναι παράγωγος μιας εκ των τριών άλλων. Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων  $f, g, f + g, f \cdot g$  και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$



**ΘΕΜΑ 25**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \Delta = (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\eta\mu^2 x}$

- (ε 1) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της
- (ε 2) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα
- (ε 3) Να υπολογίσετε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x)}{\varepsilon\varphi^2 x}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\varepsilon\varphi^2 x}$
- (ε 4) Να εξετάσετε αν το σημείο  $K(\frac{\pi}{4}, 0)$  είναι κέντρο συμμετρίας της γραφικής παράστασης  $C_{f''}$  της συνάρτησης  $f''$
- (ε 5) Να υπολογίσετε το  $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\varepsilon\varphi^2 x dx$

**ΘΕΜΑ 26**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^3}} \cdot \frac{1}{x^4}$

- (ε 1) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της
- (ε 2) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα
- (ε 3) Να αποδείξετε ότι  $\sqrt{2}f(x) + 10x \geq 12$ , για κάθε  $x \in A_f$
- (ε 4) Έστω  $E(\Omega)$  το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη  $C_f$  τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x=1$  και  $x=2$ , τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in A_f$ , ώστε  $f(\xi) = E(\Omega)$

**ΘΕΜΑ 27**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με  $f(x) = 3\sqrt{\frac{x^2+1}{x^3}} \cdot \frac{x^2+3}{x^4}$

- (ε 1) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία, να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$  και το σύνολο τιμών της  $f$
- (ε 2) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα
- (ε 3) Να υπολογίσετε το  $\int_1^2 f(x)dx$

**ΘΕΜΑ 28**

Έστω συνάρτηση  $f$ , με συνεχή παράγωγο στο  $\mathbb{R}$  και  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < \beta$  για την οποία ισχύουν  $f(f(x)) + x = 2f(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , επιπλέον η  $f'$  δεν παρουσιάζει ακρότατο σε εσωτερικό σημείο του  $\Delta = [\alpha, \beta]$  για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- (ε 1) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι "1-1" στο  $\mathbb{R}$
- (ε 2) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε  $f'(x) \neq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- (ε 3) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$
- (ε 4) Να υπολογίσετε την τιμή της  $f$  στο  $x_0 = 0$
- (ε 5) Αν επιπλέον για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι  $f'(x) \geq 1$ , τότε να βρείτε τον τύπο της  $f$

**ΘΕΜΑ 29**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \Delta = (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f(x) = \frac{x - \eta \mu x}{x}$

- (ε 1) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία
- (ε 2) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$
- (ε 3) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα
- (ε 4) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\alpha \in \Delta$ , ώστε  $2f'(x) \leq \eta \mu \alpha$ , για κάθε  $x \in \Delta$

**ΘΕΜΑ 30**

Έστω η συνάρτηση  $f$ , με  $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x} & , 0 < x \neq 1 \\ -1 & , x = 1 \end{cases}$

- (ε 1) Να αποδείξετε ότι  $f$  συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$  με  $f'(1) = -\frac{1}{2}$
- (ε 2) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f'$  και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η  $f'$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $A_f$
- (ε 3) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f''$  και στη συνέχεια να εξετάσετε αν η  $f''$  είναι συνεχής στο  $A_f$
- (ε 4) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $x^\alpha = e^{\alpha(1-x)}$   $x > 0$  και  $\alpha \in \mathbb{R}$
- (ε 5) Να αποδείξετε ότι  $4E(\Omega) < 3$ , όπου  $E(\Omega)$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_g$  και την ευθεία  $x = 1$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ \frac{x \ln x}{1-x} & , 0 < x \neq 1 \\ -1 & , x = 1 \end{cases}$$

**ΘΕΜΑ 31**

Έστω η συνάρτηση  $f : \Delta = (0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f(x) = \ln x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

- (ε 1) Να μελετήσετε την  $f$ , ως προς την μονοτονία
- (ε 2) Να μελετήσετε την  $f$ , ως προς την κυρτότητα
- (ε 3) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$
- (ε 4) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\xi \in \Delta$ , ώστε  
$$\xi f(x) \eta \mu \xi \leq 1 + \sigma \varphi^2 \xi, \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

**ΘΕΜΑ 32**

Έστω η συνάρτηση  $f$ , με  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

- (ε 1) Να μελετήσετε την  $f$ , ως προς την συνέχεια και να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$
- (ε 2) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f'$
- (ε 3) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  και τις ασύμπτωτες της  $C_f$
- (ε 4) Να εξετάσετε αν η  $f'$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$

**ΘΕΜΑ 33**

Έστω η συνάρτηση  $f$ , με  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$

- (ε 1) Να μελετήσετε την  $f$ , ως προς την μονοτονία
- (ε 2) Να μελετήσετε την  $f$ , ως προς την κυρτότητα
- (ε 3) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$
- (ε 4) Να βρείτε το εμβαδόν  $E(\Omega)$  του χωρίου  $\Omega$  το οποίο περικλείεται από τη  $C_f$  τον άξονα  $x'$  και τις ευθείες  $x = e$  και  $x = e^2$

**ΘΕΜΑ 34**

Έστω η συνάρτηση  $f : \Delta = [-\frac{2}{3}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f(x) = x\sqrt{x+1}$

- (ε 1) Να μελετήσετε την  $f$ , ως προς την μονοτονία
- (ε 2) Να μελετήσετε την  $f$ , ως προς την κυρτότητα
- (ε 3) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στη  $C_f$  στο σημείο  $x_0 = 0$  είναι ο άξονας συμμετρίας των  $C_f, C_{f^{-1}}$
- (ε 4) Αν η  $f^{-1}$  είναι συνεχής, τότε να βρείτε το εμβαδόν  $E(\Omega)$  του χωρίου  $\Omega$  το οποίο περικλείεται από τη  $C_{f^{-1}}$  τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 0$  και  $x = 6$

**ΘΕΜΑ 35**

Έστω η συνάρτηση  $f$ , με  $f(x) = x \ln(x^2 + 1)$

- (ε 1) Να βρείτε το σύνολο τιμών της και να αποδείξετε ότι η  $C_f$  έχει κέντρο συμμετρίας
- (ε 2) Να εξετάσετε την  $f$ , ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμψής
- (ε 3) Να αποδείξετε ότι ο άξονας  $x'x$  εφάπτεται στις  $C_f, C_{f'}$
- (ε 4) Να εξετάσετε αν οι  $C_{f'}, C_{f''}$  έχουν ασύμπτωτες
- (ε 5) Αν η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$  είναι συνεχής, τότε να υπολογίσετε το  $I = \int_0^{\sqrt{e-1}} f^{-1}(x) dx$

**ΘΕΜΑ 36**

Έστω η συνάρτηση  $f: \Delta = (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , παραγωγίσιμη στο  $\Delta$  η ευθεία  $x = 1$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$ , η  $f$  έχει το πολύ δύο αρνητικές τιμές και μια τουλάχιστον θετική τιμή και για κάθε  $x \in \Delta$  ισχύει ότι:  $2\sqrt{\ln x} f'(x) = C f^2(x)(2 \ln x + 1)$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι η  $x = 1$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_{f'}$

(ε 2) Να αποδείξετε ότι  $C < 0$

(ε 3) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$

(ε 4) Αν  $\int_e^{e^4} f(x) dx = 2$ , τότε να βρείτε το  $C$

**ΘΕΜΑ 37**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ ,  $\kappa > 1$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι:  $x(x^2 + \alpha)f'(x) = (x^2 + \alpha)f(x) + \kappa x^3(1)$ ,  $\alpha > 0$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f'$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$

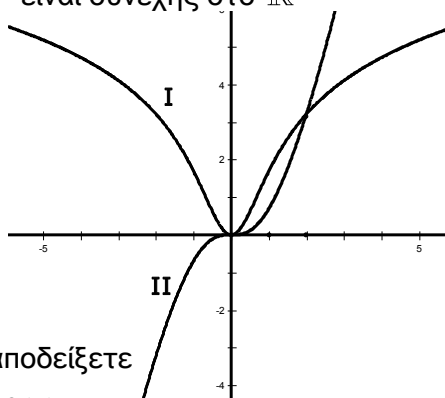
Αν οι γραμμές I, II του σχήματος είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$ ,  $f'$  και η  $f'$  έχει συνεχή παράγωγο στο  $\mathbb{R}$ , τότε

(ε 2) Να αντιστοιχίσετε τις γραμμές I, II με τις  $C_f, C_{f'}$  δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας

(ε 3) Να βρείτε την τιμή  $f''(0)$  και να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in \mathbb{R}$  ώστε  $f''(\xi) = f(\xi)$

(ε 4) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f''$  είναι περιττή και να υπολογίσετε το  $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx$

(ε 5) Αν επιπλέον ισχύει ότι  $e^2 f'(\sqrt{e^2 - 1}) - f^2(\sqrt{e^2 - 1}) = 2$ , τότε βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$

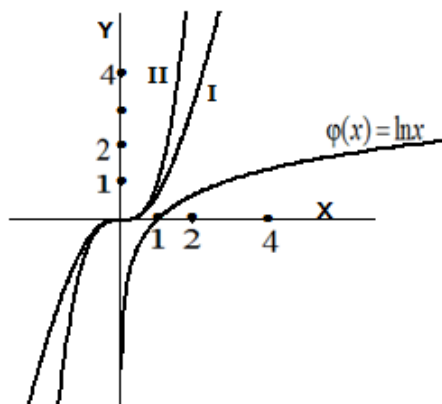


**ΘΕΜΑ 38**

Οι γραμμές I, II είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, g$

με  $f(x) = x^3$  και  $g(x) = x \ln(x^2 + 1)$

- (ε 1) Να βρείτε την θέση των  $C_f, C_g$  και στη συνέχεια να αντιστοιχίσετε κάθε μια από τις  $C_f, C_g$  με κάθε μια από τις γραμμές I, II



- (ε 2) Να δικαιολογήσετε πως θα αντιστοιχίσετε στον άξονα  $x'$  τους αριθμούς  $e$  και  $\sqrt{e-1}$  και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις  $C_f, C_g$  και την ευθεία  $x = \sqrt{e-1}$

**ΘΕΜΑ 39**

Έστω  $f$ , με  $f(x) = 6x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 12\eta\mu x + 6\chi\eta\mu x + 6\sigma\upsilon\nu x + 12x$

- (ε 1) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει διάστημα  $[\alpha, \beta]$  στο οποίο η  $f'$  να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle
- (ε 2) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία
- (ε 3) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα
- (ε 4) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$



ΘΕΜΑ 40

A Έστω  $f$ , με  $f(x) = x + 1 - \frac{2}{2-x}$

(ε 1) Να μελετήσετε την  $f$   
ως προς τη μονοτονία  
την κυρτότητα και  
να βρείτε τις ασύμπτωτες

(ε 2) Να αποδείξετε

$$2f'(x) = 2 - (x+1-f(x))^2$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

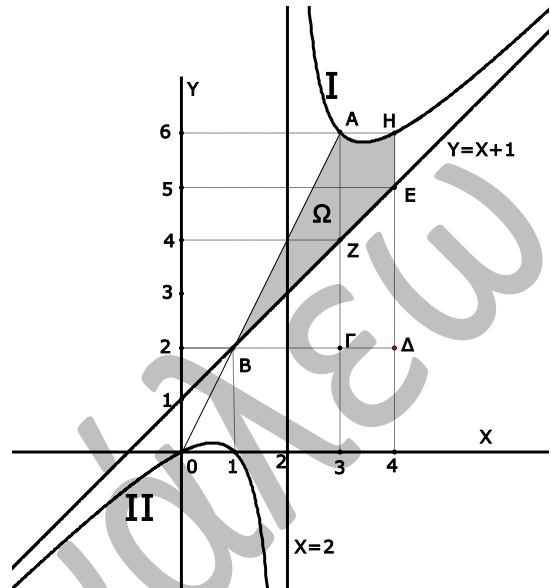
(ε 3) Αν η γραφική παράσταση  $C_f$   
αποτελείται από τις γραμμές  
I και II του σχήματος, τότε

να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου  $\Omega$

B Δίνεται  $g$ , παραγωγίσιμη στο  $A = \mathbb{R}$ ,  $g(0) = 0$  και για κάθε  $x \in A$

$$\text{ισχύουν } g(x) \neq x+1 \text{ και } 2g'(x) + (x-g(x))^2 = 1 - 2(x-g(x))$$

Να βρείτε τον τύπο της  $g$



ΘΕΜΑ 41

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με συνεχή παράγωγο στο  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

$$\text{ισχύει } xf'(x) + f(x) \int_0^1 f(x) dx = 6kx + 2, \quad k \in \mathbb{R} \quad (1), \quad \int_0^1 f(x) dx \geq 0$$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0,1)$  ώστε  $f(0)f(\xi) = 2$

(ε 2) Να αποδείξετε ότι  $f'(0) \neq 0$

(ε 3) Αν  $k = 1$ , τότε να βρείτε τον τύπο της  $f$