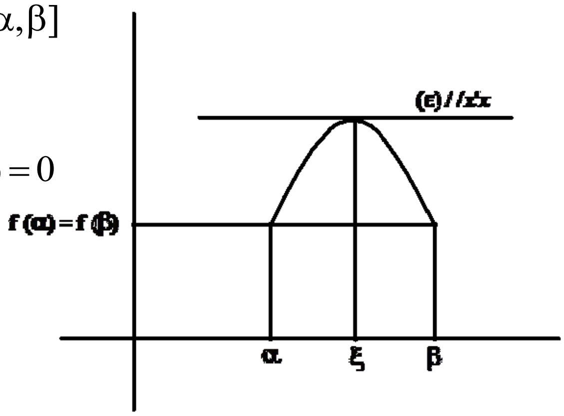
Θεώρημα Rolle

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$,ώστε $f^{/}(\xi)=0$



Γεωμετρική Ερμηνεία

Όταν μια συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε υπάρχει μια τουλάχιστον ευθεία (ε) η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f σε εσωτερικό σημείο ξ του $[\alpha,\beta]$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

Rol 1 Πρόταση

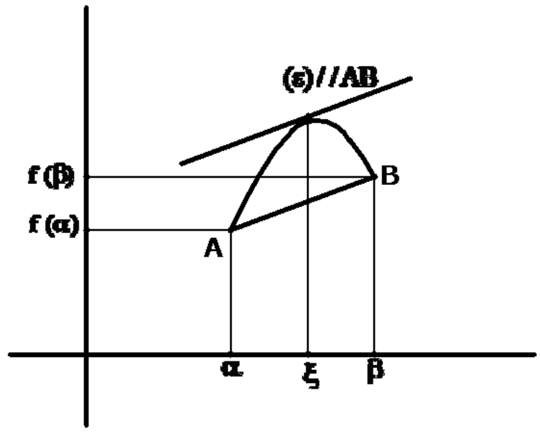
Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $f^{/}(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f είναι $"1-1"$ στο Δ

ενδεικτική απάντηση

Αν η f **δεν** είναι $"1-1"$ στο Δ τότε υπάρχουν $\alpha,\beta\in\Delta$ Με $\alpha\neq\beta$ ώστε $f(\alpha)=f(\beta)$, οπότε από το θεώρημα του Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f^{/}(\xi)=0$, άτοπο .Οπότε η f είναι $"1-1"$ στο Δ

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) ,τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f^{/}(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$



Γεωμετρική Ερμηνεία

Όταν μια συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε υπάρχει μια τουλάχιστον ευθεία (ε) η οποία εφάπτεται στη γραφική παράστασητης f σε εσωτερικό σημείο ξ του $[\alpha,\beta]$ και είναι παράλληλη στην χορδή AB όπου $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$

ΘΜΤ 1

Έστω συνάρτηση f συνεχήςστο $[1,6]$ παραγωγίσιμη στο $(1,6)$.Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\kappa,\rho,\xi\in(1,6)$, $\kappa\neq\rho$ ώστε $3f'(\kappa)+2f'(\rho)=5f'(\xi)$

ενδεικτική απάντηση

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[1,4]$,άρα υπάρχει $\kappa\in(1,4)$,ώστε $f'(\kappa)=\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}\Rightarrow 3f'(\kappa)=f(4)-f(1)$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[4,6]$,άρα υπάρχει $\rho\in(4,6)$,ώστε $f'(\rho)=\dfrac{f(6)-f(4)}{6-4}\Rightarrow 2f'(\rho)=f(6)-f(4)$

οπότε $\Rightarrow 3f'(\kappa)+2f'(\rho)=f(6)-f(1)$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσειςτου θεωρήματος μέσης τιμής στο $[1,6]$,άρα υπάρχει $\xi\in(1,6)$,ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(6)-f(1)}{6-1}\Rightarrow 5f'(\xi)=f(6)-f(1)$,

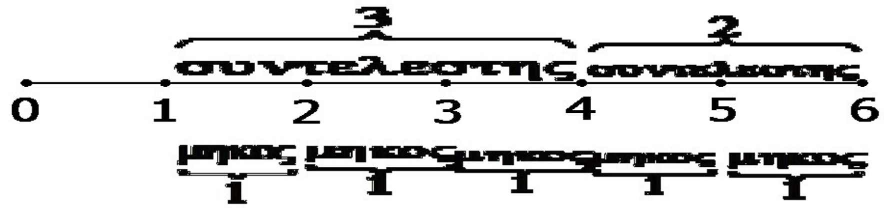
οπότε $3f(\kappa)+2f(\rho)=5f(\xi)$

Γενικά Όταν μ,λ,κ θετικοί , με $\mu+\lambda=\kappa$

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο (α,β).Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\gamma,\delta,\xi\in(\alpha,\beta)$, $\gamma\neq\delta$ ώστε $\mu f(\gamma)+\lambda f(\delta)=\kappa f(\xi)$

Το [1,6] έχει μήκος μ=6-1=5 Το άθροισμα S τωνσυνελεστών είναι 5

χωρίζουμε το [1,6] σε S=5 ίσα μέρη , το κάθε ένα έχει μήκος 1



Το [α,β] έχει μήκος μ=β-α Το άθροισμα S τωνσυνελεστών είναι κ

χωρίζουμε το [α,β] σε S=κ ίσα μέρη ,το κάθε ένα έχει μήκος $\dfrac{\beta-\alpha}{\kappa}$

$d=\alpha+\mu\dfrac{\beta-\alpha}{\kappa}$

Θ.Μ.Τ στο [α,d] και στο [d,β]

ΘΜΤ 2

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$.

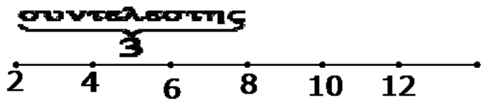
$f(1)=2$ και $f(6)=12$ Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\kappa,\rho,\xi\in(1,6)$

$\kappa\neq\rho$ ώστε $\dfrac{3}{f'(\kappa)}+\dfrac{2}{f'(\rho)}=\dfrac{5}{f'(\xi)}$

ενδεικτική απάντηση

Εδώ χωρίζουμε το διάστημα $[f(1),f(6)]=[2,12]$ σε $3+2=5$ ίσα μέρη

$(12-2=10,\ 10:5=2)$



$2=f(1)<8<f(6)=12$, οπότε από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $\gamma\in(1,6)$ ώστε $f(\gamma)=8$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[1,\gamma]$, άρα υπάρχει $\kappa\in(1,\gamma)$, ώστε $f'(\kappa)=\dfrac{f(\gamma)-f(1)}{\gamma-1}=\dfrac{6}{\gamma-1}\Rightarrow\dfrac{f'(\kappa)}{3}=\dfrac{2}{\gamma-1}$

άρα $\dfrac{3}{f'(\kappa)}=\dfrac{\gamma-1}{2}$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[\gamma,6]$, άρα υπάρχει $\rho\in(\gamma,6)$, ώστε $f'(\rho)=\dfrac{f(6)-f(\gamma)}{6-\gamma}=\dfrac{4}{6-\gamma}\Rightarrow\dfrac{f'(\rho)}{2}=\dfrac{2}{6-\gamma}$

άρα $\dfrac{2}{f'(\rho)}=\dfrac{6-\gamma}{2}$, οπότε $\dfrac{3}{f'(\kappa)}+\dfrac{2}{f'(\rho)}=\dfrac{5}{2}$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[1,6]$, άρα υπάρχει $\xi\in(1,6)$, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(6)-f(1)}{6-1}=\dfrac{10}{5}=2\Rightarrow\dfrac{1}{f'(\xi)}=\dfrac{1}{2}$

Οπότε $\dfrac{3}{f'(\kappa)}+\dfrac{2}{f'(\rho)}=\dfrac{5}{f'(\xi)}$

ΘΜΤ 3

Έστω f παραγωγίσιμη $\mathbb{R}$, $\mathrm{f}'(x) > \kappa > 0$, τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$

ενδεικτική απάντηση

1. • Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[\alpha, x]$, άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, x)$ ώστε $\mathrm{f}'(\xi) = \dfrac{\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(\alpha)}{x - \alpha} > \kappa \overset{x-\alpha>0}{\Longrightarrow} \mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(\alpha) > \kappa(x - \alpha)$

όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}[\kappa(x-\alpha)] = +\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{f}(x) = +\infty$

2. • Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[x, \alpha]$, άρα υπάρχει $\xi \in (x, \alpha)$ ώστε $\mathrm{f}'(\xi) = \dfrac{\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(\alpha)}{x - \alpha} > \kappa \overset{x-\alpha<0}{\Longrightarrow} \mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(\alpha) < \kappa(x - \alpha)$

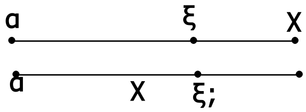
όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}[\kappa(x-\alpha)] = -\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{f}(x) = -\infty$

3. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$

4. **Προσοχή**

.

- Για να μπορούμε να γράφουμε $x \to +\infty$ πρέπει $x > \alpha$
- Για να μπορούμε να γράφουμε $x \to -\infty$ πρέπει $x < \alpha$
- Το ξ είναι συνάρτηση του x



ΘΜΤ 4

Έστω f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν
$(f(1)-f(2))(f(3)-f(2))>0$ και $(f(3)-f(4))(f(5)-f(4))>0$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,5)$

ενδεικτική απάντηση

1 • Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[1,2]$, άρα υπάρχει
$\xi_1 \in (1,2)$ ώστε $f'(\xi_1)=f(2)-f(1)$

2. • Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[2,3]$, άρα υπάρχει
$\xi_2 \in (1,2)$ ώστε $f'(\xi_2)=f(3)-f(2)$, f' συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ και

3. $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=(f(2)-f(1))(f(3)-f(2))=-(f(1)-f(2))(f(3)-f(2))<0$

Οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho_1 \in (\xi_1,\xi_2)$ ώστε $f'(\rho_1)=0$

4. • Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[3,4]$, άρα υπάρχει
$\xi_3 \in (3,4)$ ώστε $f'(\xi_3)=f(4)-f(3)$

• Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[4,5]$, άρα υπάρχει
$\xi_4 \in (4,5)$ ώστε $f'(\xi_4)=f(5)-f(4)$, f' συνεχής στο $[\xi_3,\xi_4]$ και
$f'(\xi_3)f'(\xi_4)=(f(4)-f(3))(f(5)-f(4))=-(f(3)-f(4))(f(5)-f(4))<0$

Οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho_2 \in (\xi_3,\xi_4)$ ώστε $f'(\rho_2)=0$

5. $f'(\rho_1)=0=f'(\rho_2)$, η f' ικανοποιεί τις προυποθέσειες του θεωρήματος Rolle στο $[\rho_1,\rho_2]$, άρα υπάρχει $\rho_0 \in (\rho_1,\rho_2)$ ώστε $f''(\rho_0)=0$

Μπορείτε να το λύσετε και με Fermat και Rolle και όχι μόνο

ΘΜΤ 5

Δίνεται η συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$ με

$f(\alpha)=0=f(\beta)$ και υπάρχουν $\gamma,\delta\in(\alpha,\beta)$, με $f(\gamma)f(\delta)<0$

τότε να αποδείξετε ότι

(ε1) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα στο (α,β)

(ε2) Υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\kappa,\rho\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\kappa)f''(\rho)<0$

(ε3) Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (α,β)

ενδεικτική απάντηση

Έστω $\alpha<\gamma<\delta<\beta$ και $f(\gamma)<0<f(\delta)$

(ε1) $f(\gamma)f(\delta)<0$ Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Bolzano στο $[\gamma,\delta]$, άρα υπάρχει $\sigma\in(\gamma,\delta)\subseteq[\alpha,\beta]$ ώστε $f(\sigma)=0$, σ ρίζα

(ε2) $\alpha<\gamma<\sigma<\delta<\beta$

1 • Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[\alpha,\gamma]$, άρα υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\gamma)$ ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\dfrac{f(\gamma)}{\gamma-\alpha}<0$

2 • Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[\gamma,\sigma]$, άρα υπάρχει $\xi_2\in(\gamma,\sigma)$ ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(\sigma)-f(\gamma)}{\sigma-\gamma}=-\dfrac{f(\gamma)}{\sigma-\gamma}>0$

3 • Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[\sigma,\delta]$, άρα υπάρχει $\xi_3\in(\sigma,\delta)$ ώστε $f'(\xi_3)=\dfrac{f(\delta)-f(\sigma)}{\delta-\sigma}=\dfrac{f(\delta)}{\delta-\sigma}>0$

4 • Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[\delta,\beta]$, άρα υπάρχει $\xi_4\in(\delta,\beta)$ ώστε $f'(\xi_4)=\dfrac{f(\beta)-f(\delta)}{\beta-\delta}=-\dfrac{f(\delta)}{\beta-\delta}<0$

5 • Η f' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[\xi_1,\xi_2]$, άρα

υπάρχει $\kappa\in(\xi_1,\xi_2)$ ώστε $f''(\kappa)=\dfrac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}>0$

6 • Η f' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[\xi_3,\xi_4]$, άρα

υπάρχει $\rho\in(\xi_3,\xi_4)$ ώστε $f''(\rho)=\dfrac{f'(\xi_4)-f'(\xi_3)}{\xi_4-\xi_3}<0$

7 • Οπότε $f''(\kappa)f''(\rho)<0$ και f'' συνεχής άρα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Bolzano στο $[\kappa,\rho]$,άρα υπάρχει $x_2\in(\kappa,\rho)$ ώστε $f''(x_2)=0$

(ε3) $f'(\xi_1)f'(\xi_2)<0$ και f' συνεχής άρα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Bolzano στο $[\xi_1,\xi_2]$, άρα υπάρχει $\rho_1\in(\xi_1,\xi_2)$ ώστε $f'(\rho_1)=0$

$f'(\xi_3)f'(\xi_4)<0$ και f' συνεχής άρα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Bolzano στο $[\xi_3,\xi_4]$,άρα υπάρχει $\rho_2\in(\xi_3,\xi_4)$ ώστε $f'(\rho_2)=0$

Άρα η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (α,β)

ΘΜΤ 6

Η συνάρτηση f έχει γνησίως αύξουσα παράγωγο.Να αποδείξετε ότι για κάθε α,β, με $\alpha<\beta$ ισχύει $2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<f(\alpha)+f(\beta)$

ενδεικτική απάντηση

1 Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις πρυποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]$, άρα υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2})$, ώστε $f^/(\xi_1)=\dfrac{f(\frac{\alpha+\beta}{2})-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$

2 Η συνάρτηση f έικανοποιεί τις πρυποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]$, άρα υπάρχει $\xi_2\in(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta)$, ώστε $f^/(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$

3 $$\xi_1<\xi_2\Rightarrow f^/(\xi_1)<f^/(\xi_2)\Rightarrow \dfrac{f(\frac{\alpha+\beta}{2})-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}<\dfrac{f(\beta)-f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\frac{\beta-\alpha}{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\frac{\alpha+\beta}{2})-f(\alpha)<f(\beta)-f(\frac{\alpha+\beta}{2})\Rightarrow 2f(\frac{\alpha+\beta}{2})<f(\alpha)+f(\beta)$$

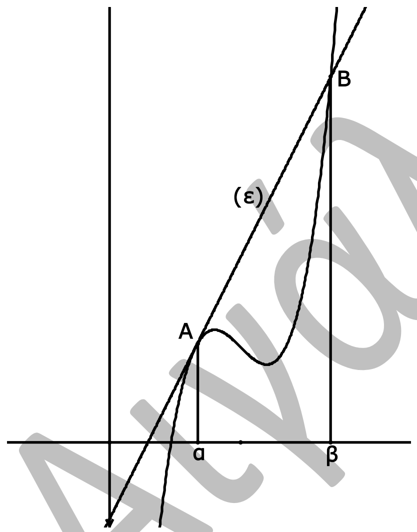
Άσκηση

Να αποδείξετε ότι $2\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{22}>\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{11}+\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{11}$

ΘΜΤ 7

Η συνάρτηση f έχει γνησίως αύξουσα παράγωγο.Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία (ε) που εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f έχει με αυτή μόνο ένα κοινό σημείο

ενδεικτική απάντηση



Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ το σημείο επαφής της (ε) με τη γραφική παράσταση της f τότε $\lambda_\varepsilon = f'(\alpha)$, αν η (ε) έχει με τη γραφική παράσταση της f εκαι άλλο κοινό σημείο $B(\beta, f(\beta))$, τότε $\lambda_\varepsilon = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

η f ίκανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[\alpha,\beta]$ άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = f'(\alpha)$, άτοπο γιατί η f' είναι γνησίως αύξουσα