ΘΕΜΑ 9

Έστω συνάρτηση $\mathrm{f}:\mathbb{R}\quad\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$2\mathrm{f}^3(x)+6\mathrm{f}(x)=2x^3+6x+1$ **(1)**

(ε 1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathrm{f}(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα $\rho\in(-1,0)$

(ε 2) Να βρείτε το σύνολο τιμών $\mathrm{f}(\mathbb{R}$

(ε 3) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{f}(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{f}(x)$

(ε 4) Να αποδείξετε ότι $6\mathrm{f}(x)\le 6x+1$

(ε 5) Να αποδείξετε ότι $2\int_0^1\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x<3$

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) Έστω η συνάρτηση g, με $g(x)=x^3+x+1$, g συνεχής και $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$, άρα $g(\mathbb{R}\quad\mathbb{R}$.

$g(0)=1$, $g(-1)=-6$. Η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[-1,0]$, άρα υπάρχει $\rho\in(-1,0)$, ώστε

$g(\rho)=0$ και ρ μοναδικό , γιατί η g είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$

Από την σχέση **(1)** για $x=\rho$ έχουμε $2\mathrm{f}^3(\rho)+6\mathrm{f}(\rho)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\mathrm{f}(\rho)(2\mathrm{f}^2(\rho)+6)=0\Rightarrow\mathrm{f}(\rho)=0$ και ρ μοναδικό

(ε 2) Η συνάρτηση g είναι "$1-1$" στο $\mathbb{R}$, άρα αντιστρέφεται και η αντίστροφη συνάρτηση g^{-1} έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

από την σχέση **(1)** έχουμε $g^{-1}(2\mathrm{f}^3(x)+6\mathrm{f}(x))=x$ **(2)**

Θεωρούμε τη συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=g^{-1}(2x^3+6x)$, $\mathrm{A}_\varphi=\mathbb{R}$

και η φ είναι "$1-1$" στο $\mathbb{R}$. Έστω $\mathrm{y}_0\in\mathbb{R}$ και $x_0=\varphi(\mathrm{y}_0)$

από την **(2)** έχουμε $x_0 = g^{-1}(2f^3(x_0)+6f(x_0))$, οπότε

$g^{-1}(2f^3(x_0)+6f(x_0)) = \varphi(y_0) \Rightarrow \varphi(f(x_0)) = \varphi(y_0)$, άρα

$f(x_0) = y_0 \Rightarrow f(\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$

(ε 3) • Από **(1)** $\Rightarrow f(x)(2f^2(x)+6) = 2x^3+6x+1$, άρα με $x>0$ έχουμε

$f(x)(2f^2(x)+6) = 2x^3+6x+1>0 \Rightarrow f(x)>0$

Με $x>1$ από την **(1)** έχουμε $6\dfrac{f(x)}{x^3} = 2+\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}-2\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^3>0$ **(3)**

άρα $2\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^3 < 2+\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}<9 \Rightarrow 0<\dfrac{f(x)}{x}<\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}}$ επομένως

$0<\dfrac{f(x)}{x^3}<\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}}\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=0$, οπότε από την **(3)**

έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$

• Έστω συνάρτηση λ, με $\lambda(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x>1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\lambda(x)=1$

$f(x)=x\lambda(x)$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

(ε 4) Από **(1)** $\Rightarrow 2(f(x)-x)[f^2(x)+f(x)+x^3+3]=1$,οπότε

$f(x)-x=\dfrac{1}{2[f^2(x)+f(x)+x^3+3]}\le\dfrac{1}{6}\Rightarrow 6f(x)\le 6x+1\Rightarrow$

$\Rightarrow 6f(x)\le 6x+1<6x+6\Rightarrow f(x)<x+1$

(ε 5) Αφού αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

$6f(x)\le 6x+1<6x+6\Rightarrow f(x)<x+1\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx<\left[\dfrac{x^2}{2}+x\right]_0^1$

Οπότε $\int_0^1 f(x)dx<\dfrac{3}{2}\Rightarrow 2\int_0^1 f(x)dx<3$