ΘΕΜΑ 7

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, με $\mathrm{f}(x)=\frac{x^2}{2^x}$ και $g(x)=\frac{\ln x}{x}$

(ε 1) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και της C_g

(ε 2) Να συγκρίνετε τις τιμές $\mathrm{f}(7), g(7)$

(ε 3) Να μελετήσετε τις f, g ως προς τη μονοτονία

(ε 4) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho\in(0,+\infty)$ ώστε $\rho^3=2^\rho\ln\rho$
$(\mathrm{e}\approx 2,7)$

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) $\bullet\ \mathrm{A_f}=\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{f}(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2^x\ln 2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2^x\ln^2 2}=0$$

άρα η $\mathrm{y}=0$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

$\bullet\ \lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{f}(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\frac{1}{2^x}=+\infty$

$\bullet\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{f}(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2^x}=-\infty$, οπότε η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$

$\bullet\ \mathrm{A}_g=(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

άρα η $\mathrm{y}=0$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

$\bullet\ \lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=-\infty$, άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g

(ε 2) $\mathrm{f}(7)=\frac{49}{128}, g(7)=\frac{\ln 7}{7}$, $\mathrm{f}(7)>g(7)\Leftrightarrow\frac{49}{128}>\frac{\ln 7}{7}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 343>128\ln 7\Leftrightarrow 87+128(2-\ln 7)>0\Leftrightarrow 87+\ln\frac{\mathrm{e}^2}{7}>0$$

(ε 3) $\mathrm{f}'(x)=\frac{2x2^x-x^2\ln 2 2^x}{2^{2x}}=\frac{x(2-x\ln 2)}{2^x}>0\Leftrightarrow 0<x<\frac{2}{\ln 2}$, οπότε

f ↘ στο $(-\infty,0]$, f ↗ στο $[0\ ,\ 2/\ln 2]$, f ↘ στο $[2/\ln 2,+\infty)$

$$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}>0\Leftrightarrow 0<x<\mathrm{e}$$

(ε 4) $f(8)=\frac{1}{4}, g(8)=\frac{3\ln 2}{8}$, $f(8)<g(8)\Leftrightarrow 8<12\ln 2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2<3\ln 2\Leftrightarrow \ln\frac{e^2}{8}<0$. Η συνάρτηση φ ,με $\varphi(x)=f(x)-g(x)$ ικανοποιεί της προϋποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[7,8]$, άρα υπάρχει $\rho\in(7,8)$ ώστε $\varphi(\rho)=0\Rightarrow \rho^3=2^\rho\ln\rho$