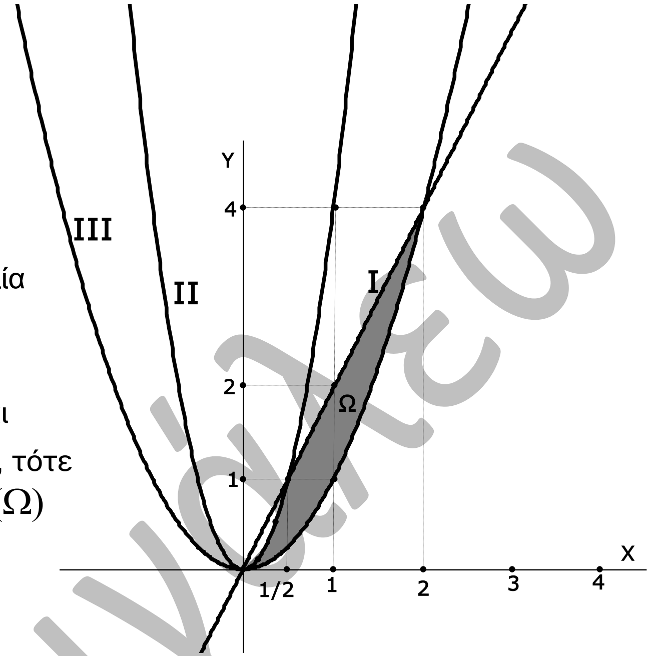
ΘΕΜΑ 6

Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g . Οι γραμμές $\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$ είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g , $\mathrm{f}og$



(ε 1) Να αντιστοιχίσετε κάθε μία από τις f , g , $\mathrm{f}og$ στη γραφική της παράσταση

(ε 2) Αν η μία από τις f, g είναι η παράγωγος της άλλης , τότε να βρείτε το εμβαδόν $\mathrm{E}(\Omega)$ του γραμμοσκιασμένου χωρίου Ω

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) **(α)** Έστω ότι η I αντιστοιχεί στην $\mathrm{f}og$, τότε $(\mathrm{f}og)(1/2)=1$

(α 1) Αν η II αντιστοιχεί στην g ,τότε η III αντιστοιχεί στην f

$(\mathrm{f}og)(1/2)=1 \Rightarrow \mathrm{f}(g(1/2))=1 \Rightarrow \mathrm{f}(1/2)=1$, άτοπο

(α 2) Αν η III αντιστοιχεί στην g ,τότε η II αντιστοιχεί στην f

$(\mathrm{f}og)(2)=4 \Rightarrow \mathrm{f}(g(2))=4 \Rightarrow \mathrm{f}(4)=4$,άτοπο

γιατί $4>1 \overset{\mathrm{f}\nearrow}{\Rightarrow} \mathrm{f}(4)>\mathrm{f}(1)=4$

(β) Έστω ότι η III αντιστοιχεί στην $\mathrm{f}og$, τότε $(\mathrm{f}og)(1)=4$

(β 1) Αν η II αντιστοιχεί στην g ,τότε η I αντιστοιχεί στην f

$(\mathrm{f}og)(1)=4 \Rightarrow \mathrm{f}(g(1))=4 \Rightarrow \mathrm{f}(4)=4=\mathrm{f}(2)$, άτοπο

η f είναι "$1-1$"

(β 2) Αν η I αντιστοιχεί στην g ,τότε η II αντιστοιχεί στην f

$(\mathrm{f}og)(2)=4 \Rightarrow \mathrm{f}(g(2))=4 \Rightarrow \mathrm{f}(4)=4=\mathrm{f}(2)$,άτοπο

γιατί $4>1 \overset{\mathrm{f}\nearrow}{\Rightarrow} \mathrm{f}(4)>\mathrm{f}(1)=4$, άρα η $\mathrm{f}\circ$ αντιστοιχεί στην II

Αν η I αντιστοιχεί στην f τότε η III αντιστοιχεί στην g

οπότε $g(1)=1 \Rightarrow \mathrm{f}(g(1))=1 \Rightarrow \mathrm{f}(1)=1=\mathrm{f}(2)$, άτοπο

τελικά η I αντιστοιχεί στην g και η III αντιστοιχεί στην f

(ε 2) Η C_g είναι ευθεία και διέρχεται από το σημείο $A(2,4)$, οπότε $g(x)=2x$ αν η f είναι παράγωγος της g, τότε $\mathrm{f}(x)=2$, άτοπο

Άρα η παράγωγος της f είναι η g δηλαδή

$$g(x)=\mathrm{f}'(x)=2x \Rightarrow \mathrm{f}(x)=2x^2+C \overset{x=0}{\Rightarrow} C=0 \Rightarrow \mathrm{f}(x)=x^2$$

$$E(\Omega)=\int_0^{1/2}(2x-4x^3)dx+\int_{1/2}^{2}(2x-x^2)dx$$