

ΘΕΜΑ 40

A Έστω  $f$ , με  $f(x) = x + 1 - \frac{2}{2-x}$

(ε 1) Να μελετήσετε την  $f$   
ως προς τη μονοτονία  
την κυρτότητα και  
να βρείτε τις ασύμπτωτες

(ε 2) Να αποδείξετε  
 $2f'(x) = 2 - (x + 1 - f(x))^2$   
για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

(ε 3) Αν η γραφική παράσταση  $C_f$   
αποτελείται από τις γραμμές  
I και II του σχήματος, τότε

να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου  $\Omega$

B Δίνεται  $g$ , παραγωγίσιμη στο  $A = \mathbb{R}$ ,  $g(0) = 0$  και για κάθε  $x \in A$   
ισχύουν  $g(x) \neq x + 1$  και  $2g'(x) + (x - g(x))^2 = 1 - 2(x - g(x))$   
Να βρείτε τον τύπο της  $g$

ενδεικτική απάντηση

B  $2g'(x) + (x - g(x))^2 = 1 - 2(x - g(x))$ , οπότε  
 $(x - g(x))^2 + 2(x - g(x)) + 1 = 2 - 2g'(x)$ , άρα

$$\frac{1 - g'(x)}{(1 + x - g(x))^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left( -\frac{1}{1 + x - g(x)} \right)' = \left( \frac{1}{2}x \right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{1 + x - g(x)} = \frac{1}{2}x + C \stackrel{x=0}{\Rightarrow} C = -1, \text{ οπότε } g(x) = x + 1 - \frac{2}{2-x}$$

