ΘΕΜΑ 39

Έστω f, με $\mathrm{f}(x)=6x^4-2x^3-3x^2-12\eta\mu x+6x\eta\mu x+6\sigma\upsilon\nu x+12x$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει διάστημα $[\alpha,\beta]$ στο οποίο η $\mathrm{f}^{/}$ να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Rolle

(ε 2) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

(ε 3) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

(ε 4) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτηση f

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) $\mathrm{f}^{/}(x)=24x^3-6x^2-6x-12\sigma\upsilon\nu x+6x\sigma\upsilon\nu x+12$

$\mathrm{f}^{/}(x)=12x^3-6x^2-12\sigma\upsilon\nu x+12+12x^3+6x\sigma\upsilon\nu x-6x$

$\mathrm{f}^{/}(x)=12(x^3-\dfrac{x^2}{2}-\sigma\upsilon\nu x+1)+6x(2x^2+\sigma\upsilon\nu x-1)$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις κ,λ με τύπους

- $\kappa(x)=x^3-\dfrac{x^2}{2}-\sigma\upsilon\nu x+1$ και $\lambda(x)=2x^2+\sigma\upsilon\nu x-1$

  $\kappa^{/}(x)=3x^2-x+\eta\mu x$, $\kappa^{//}(x)=6x-1+\sigma\upsilon\nu x$

  $\kappa^{(3)}(x)=6-\eta\mu x>0$, άρα η $\kappa^{//}$ είναι γνησίως αύξουσα

  Με $x\geq 0\Rightarrow \kappa^{//}(x)\geq 0$, με $x\leq 0\Rightarrow \kappa^{//}(x)\leq 0$, άρα

  Η $\kappa^{/}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta 1=[0,+\infty)$,οπότε $\kappa^{/}(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Delta 1$ και η $\kappa^{/}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta 2=(-\infty,0]$ άρ $\kappa^{/}(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\Delta 2$, άρα η κ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

- $\lambda^{/}(x)=4x-\eta\mu x\Rightarrow \lambda^{//}(x)=4-\sigma\upsilon\nu x>0$, άρα η $\lambda^{/}$ είναι γνησίως αύξουσα , με $x\geq 0\Rightarrow \lambda^{/}(x)\geq 0$, άρα η λ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta 1=[0,+\infty)$ και για $x\leq 0\Rightarrow \lambda^{/}(x)\leq 0$, άρα η λ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta 2=(-\infty,0]$, οπότε η συνάρτηση $6x(2x^2+\sigma\upsilon\nu x-1)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η $\mathrm{f}^{/}$ είναι γνησίως αύξουσα οπότε δεν υπάρχει διάστημα $[\alpha,\beta]$ στο οποίο η $\mathrm{f}^{/}$ να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Rolle , αφού $\mathrm{f}^{/}(\alpha)\neq \mathrm{f}^{/}(\beta)$