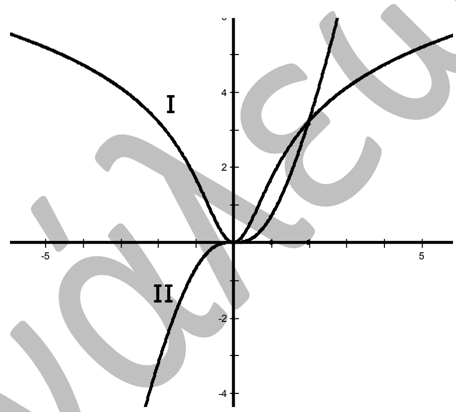
ΘΕΜΑ 37

Δίνεται η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, $\kappa>1$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι : $x(x^2+\alpha)\mathrm{f}^{/}(x)=(x^2+\alpha)\mathrm{f}(x)+\kappa x^3$ **(1)**, $\alpha>0$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\mathrm{f}^{/}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$



Αν οι γραμμές I,II του σχήματος είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , $\mathrm{f}^{/}$ και η $\mathrm{f}^{/}$ έχει συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$, τότε

(ε 2) Να αντιστοιχίσετε τις γραμμές I,II με τις $C_{\mathrm{f}},C_{\mathrm{f}^{/}}$ δικαιολογώντας πλήρως την απάντηση σας

(ε 3) Να βρείτε την τιμή $\mathrm{f}^{//}(0)$ και να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ ώστε $\mathrm{f}^{//}(\xi)=\mathrm{f}(\xi)$

(ε 4) Να αποδείξετε ότι η συνάρτση $\mathrm{f}^{//}$ είναι περιττή και να υπολογίσετε **το** $\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$

(ε 5) Αν επιπλέον ισχύει ότι $\mathrm{e}^2\mathrm{f}^{/}\left(\sqrt{\mathrm{e}^2-1}\right)-\mathrm{f}^2\left(\sqrt{\mathrm{e}^2-1}\right)=2$, τότε βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

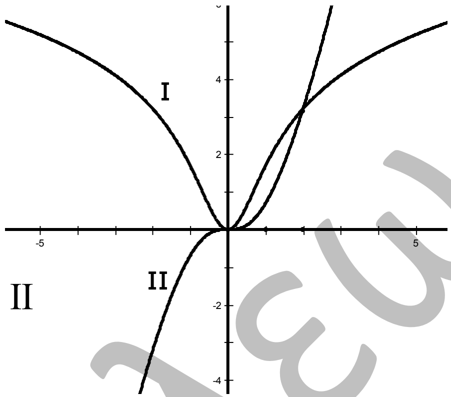
ενδεικτική απάντηση

(ε 1) Από την **(1)** για $x=0\Rightarrow\mathrm{f}(0)=0$ και για $x\neq0$ έχουμε ότι

$$\mathrm{f}^{/}(x)=\frac{\mathrm{f}(x)}{x}+\frac{\kappa x^2}{x^2+\alpha},\ \lim_{x\to0}\frac{\mathrm{f}(x)}{x}=\mathrm{f}^{/}(0)\text{ και }\lim_{x\to0}\frac{\kappa x^2}{x^2+\alpha}=0$$

οπότε $\lim_{x\to0}\mathrm{f}^{/}(x)=\mathrm{f}^{/}(0)$ και $\mathrm{f}^{/}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων ,άρα η συνάρτηση $\mathrm{f}^{/}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

(ε 2) Αν η γραμμή I αντιστοιχεί στη C_f τότε η II αντιστοιχεί στη $C_{f'}$
Όμως $f' \nearrow$ στο $(-\infty,0)$,άρα η C_f είναι κυρτή στο $(-\infty,0)$
άτοπο , οπότε η γραμμή I αντιστοιχεί στη $C_{f'}$ και η γραμμή II αντιστοιχεί στη C_f



(ε 3) • $f''(0)$ $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}$, οπότε

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+\alpha)f(x)+\kappa x^3-x(x^2+\alpha)f'(0)}{x^2(x^2+\alpha)},\overset{\text{DLH}}{\Rightarrow}$$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{2xf(x)+(x^2+\alpha)f'(x)+3\kappa x^2-(3x^2+\alpha)f'(0)}{2x(x^2+\alpha)+4x^3}\overset{\text{DLH}}{\Rightarrow}$$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)+2xf'(x)+2xf'(x)+(x^2+\alpha)f''(x)+6\kappa x-6xf'(0)}{2(x^2+\alpha)+2x^2+12x^2}$$

$$\Rightarrow f''(0)=\frac{f''(0)}{2}\Rightarrow f''(0)=0$$

• Από το σχήμα έχουμε $f'(0)=f(0)$ και $f'(\rho)=f(\rho)$,οπότε η συνάρτηση g, με $g(x)=f'(x)-f(x)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Rolle στο $[0,\rho]$, άρα υπάρχει $\xi\in(0,\rho)$, ώστε $g'(\xi)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f''(\xi)=f(\xi)$

(ε 4) • Από **(1)** $\overset{x\neq 0}{\Rightarrow}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{\kappa x}{x^2+\alpha}\Rightarrow\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\left(\dfrac{\kappa}{2}\ln(x^2+\alpha)\right)'$

άρα $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\kappa}{2}\ln(x^2+\alpha)+\beta$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\beta\Rightarrow f'(0)=\beta\Rightarrow\beta=0$

άρα $f(x)=\dfrac{\kappa}{2}x\ln(x^2+\alpha)$, f περιττή οπότε f'' και $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx=0$

(ε 5) $f(x)=\frac{\kappa}{2}x\ln(x^2+\alpha)\Rightarrow f'(x)=\frac{\kappa}{2}\ln(x^2+\alpha)+\frac{\kappa x^2}{x^2+\alpha}$, για

$x=0\Rightarrow f'(0)=\ln\alpha\Rightarrow \ln\alpha=0\Rightarrow \alpha=1$, **οπότε**

$f(x)=\frac{\kappa}{2}x\ln(x^2+1)$ και $f'(x)=\frac{\kappa}{2}\ln(x^2+1)+\frac{\kappa x^2}{x^2+1}$

$f^2\left(\sqrt{e^2-1}\right)=(e^2-1)\kappa^2$ και $e^2f'\left(\sqrt{e^2-1}\right)-f^2\left(\sqrt{e^2-1}\right)=2$

$$e^2f'\left(\sqrt{e^2-1}\right)-f'\left(\sqrt{e^2-1}\right)=\kappa(2e^2-1)-\kappa^2(e^2-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \kappa(2e^2-1)-\kappa^2(e^2-1)=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \kappa^2(e^2-1)-\kappa(2e^2-1)+2=0\Rightarrow \kappa=2$$

Άρα $f(x)=x\ln(x^2+1)$