ΘΕΜΑ 35

Έστω η συνάρτηση f, με $\mathrm{f}(x)=x\ln(x^2+1)$

(ε 1) Να βρείτε το σύνολο τιμών της και να αποδείξετε ότι η $\mathrm{C_f}$ έχει κέντρο συμμετρίας

(ε 2) Να εξετάσετε την f, ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής

(ε 3) Να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ εφάπτεται στις $\mathrm{C_f}, \mathrm{C_{f'}}$

(ε 4) Να εξετάσετε αν οι $\mathrm{C_{f'}}, \mathrm{C_{f''}}$ έχουν ασύμπτωτες

(ε 5) Αν η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι συνεχής, τότε να υπολογίσετε το $\mathrm{I}=\int_0^{\sqrt{\mathrm{e}-1}} \mathrm{f}^{-1}(x)\mathrm{d}x$

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) Η f είναι συνεχής στο $\mathrm{A_f}=\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{f}(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{f}(x)=+\infty$, άρα $\mathrm{f}(\mathrm{A_f})=\mathbb{R}$

$\mathrm{f}(-x)=-x\ln(x^2+1)=-\mathrm{f}(x)$, f περιττή, άρα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων

(ε 2) $\mathrm{f}'(x)=\ln(x^2+1)+\dfrac{2x^2}{x^2+1}$ και $\mathrm{f}''(x)=\dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$, $\mathrm{f}''(0)=0$

$\mathrm{f}''(x)>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $\mathrm{f}''(x)<0$, για κάθε $x\in(-\infty,0)$

οπότε η f παρουσιάζει για $x=0$ σημείο καμπής το $\mathrm{O}(0,0)$

(ε 3) $\mathrm{f}(0)=\mathrm{f}'(0)=\mathrm{f}''(0)=0$, άρα ο άξονας $x'x$ εφάπτεται στις $\mathrm{C_f}, \mathrm{C_{f'}}$

(ε 4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\mathrm{f}'(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\ln(x^2+1)+\dfrac{2x^2}{x^2+1}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\mathrm{f}'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}+\dfrac{2x}{x^2+1}\right]=0$, άρα η $\mathrm{C_{f'}}$ δεν έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f^{//}(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2+1)^2}=0$, άρα η $C_{f^{//}}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=0$ στο $-\infty$ και στο $+\infty$

(ε 5) Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Rightarrow x=f(u)\Rightarrow dx=f^{/}(u)du$

για $x=0\Rightarrow f(u)=0=f(0)\Rightarrow u=0$ και για $x=\sqrt{e-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow f(u)=\sqrt{e-1}=f(\sqrt{e-1})\Rightarrow u=\sqrt{e-1}$

$$I=\int_0^{\sqrt{e-1}} uf^{/}(u)du=\left[uf(u)\right]_0^{\sqrt{e-1}}-\int_0^{\sqrt{e-1}} f(u)du\,,\ J=\int_0^{\sqrt{e-1}} f(u)du$$

$$J=\int_0^{\sqrt{e-1}} f(u)du=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{e-1}} 2u\ln(u^2+1)du\Rightarrow$$

$$\Rightarrow J=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{e-1}}(u^2+1)^{/}\ln(u^2+1)du\Rightarrow$$

$$\Rightarrow J=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{e-1}}(u^2+1)^{/}\ln(u^2+1)du\Rightarrow$$

$$\Rightarrow J=\frac{1}{2}\left[(u^2+1)^{/}\ln(u^2+1)\right]_0^{\sqrt{e-1}}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{e-1}}2udu$$

$$\Rightarrow J=\frac{1}{2}\left[(u^2+1)\ln(u^2+1)\right]_0^{\sqrt{e-1}}-\frac{1}{2}\left[u^2\right]_0^{\sqrt{e-1}}=\frac{1}{2}$$

$$I=e-1-\frac{1}{2}=\frac{2e-3}{2}$$