ΘΕΜΑ 34

Έστω η συνάρτηση $f:\Delta=[-\frac{2}{3},+\infty)\to\mathbb{R}$, με $f(x)=x\sqrt{x+1}$

(ε 1) Να μελετήσετε την f , ως προς την μονοτονία

(ε 2) Να μελετήσετε την f , ως προς την κυρτότητα

(ε 3) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στη C_f στο σημείο $x_0=0$ είναι ο άξονας συμμετρίας των $C_f, C_{f^{-1}}$

(ε 4) Αν η f^{-1} είναι συνεχής , τότε να βρείτε το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω το οποίο περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=6$

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) $f'(x)=\sqrt{x+1}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}\Rightarrow f'(x)=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$, , για κάθε $x\in\Delta$

$f'(x)\ge 0$, για κάθε $x\in\Delta$ και f συνεχής στο Δ , άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ (μπορούμε και με τον ορισμό)

(ε 2) $2f''(x)=\frac{3x+4}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$, για κάθε $x\in\Delta$, $f''(x)>0$, για κάθε $x\in\Delta$, άρα η f είναι κυρτή στο Δ

(ε 3) Η f είναι είναι γνησίως αύξουσα στο Δ άρα είναι "$1-1$" οπότε αντιστρέφεται , $f(0)=0$ και $f'(0)=1$ οπότε η εφαπτομένη στη C_f στο σημείο $x_0=0$ είναι η $y=x$, η οποία είναι ο άξονας συμμετρίας των $C_f, C_{f^{-1}}$

(ε 4) Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(\Delta)=\left[-\frac{2\sqrt{3}}{9},+\infty\right)$ (απόδειξη)

$f(0)=0\Rightarrow f^{-1}(f(0))=f^{-1}(0)\Rightarrow f^{-1}(0)=0$, άρα $f^{-1}(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[0,6]$, οπότε $E(\Omega)=\int_0^6 f^{-1}(x)dx$

1ΓΕΛ Αιγάλεω

$E(\Omega)=\int_0^6 f^{-1}(x)dx$, $f^{-1}(x)=u \Rightarrow x=f(u) \Rightarrow dx=f'(u)du$

για $x=0 \Rightarrow u=0$, για $x=6 \Rightarrow f(u)=6=f(3) \Rightarrow u=3$

Οπότε $E(\Omega)=\int_0^3 uf'(u)du=[uf(u)]_0^3-\int_0^3 f(u)du \Rightarrow$

$\Rightarrow E(\Omega)=18-A$, $A=\int_0^3 f(u)du \Rightarrow A=\int_0^3 u\sqrt{u+1}du$

$\sqrt{u+1}=w \Rightarrow u=w^2-1 \Rightarrow du=2wdw$, για $u=0 \Rightarrow w=1$ και

για $u=3 \Rightarrow w=2$, οπότε $A=\frac{1}{2}\int_0^2 wdw=\frac{1}{4}[w^2]_0^2=1$

άρα $E(\Omega)=17$ τ.μ

1 ΓΕΛ Αιγάλεω