

ΘΕΜΑ 33

Έστω η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$

- (ε 1) Να μελετήσετε την f , ως προς την μονοτονία
- (ε 2) Να μελετήσετε την f , ως προς την κυρτότητα
- (ε 3) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f
- (ε 4) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω το οποίο περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = e$ και $x = e^2$

ενδεικτική απάντηση

Πρέπει $x \neq 0$ και $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$, άρα $A_f = (1, +\infty)$

- (ε 1) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο A_f , ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων κάθε μια από τις συναρτήσεις $\frac{1}{x}$ και $\frac{1}{\sqrt{\ln x}}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο A_f και έχουν θετικές τιμές άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_f (Η μονοτονία μπορεί να βρεθεί και με παραγώγους)

- (ε 2) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2 \ln x} (\sqrt{\ln x} + \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}) < 0 \Rightarrow$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2 \sqrt{\ln x}} - \frac{1}{2x^2 \sqrt{\ln x} \ln x}, \text{ για κάθε } x \in A_f$$

κάθε μια από τις συναρτήσεις $\frac{1}{x^2 \sqrt{\ln x}}$ και $\frac{1}{2x^2 \sqrt{\ln x} \ln x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο A_f , άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο A_f , οπότε η C_f είναι κυρτή στο A_f

(ε 3) Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο A_f , άρα το σύνολο

$$\text{τιμών της είναι } f(A_f) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{\ln x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} = +\infty, \text{ άρα } f(A_f) = (0, +\infty)$$

(ε 4) $f(x) > 0$, για κάθε $x \in A_f$, άρα $E(\Omega) = \int_e^{e^2} f(x) dx$, οπότε

$$E(\Omega) = \int_e^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx = \int_e^{e^2} (\ln x)' (\ln x)^{-\frac{1}{2}} dx, \text{ άρα}$$

$$E(\Omega) = 2 \int_e^{e^2} [(\ln x)^{\frac{1}{2}}]' dx = 2(\sqrt{2} - 1) \text{ τ.μ}$$