ΘΕΜΑ 30

Έστω η συνάρτηση f , με $\mathrm{f}(x)=\begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1-x} & ,0<x\neq 1 \\ -1 & ,x=1 \end{cases}$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $\mathrm{f}^{/}(1)=-\dfrac{1}{2}$

(ε 2) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $\mathrm{f}^{/}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η $\mathrm{f}^{/}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathrm{A_f}$

(ε 3) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $\mathrm{f}^{//}$ και στη συνέχεια να εξετάσετε αν η $\mathrm{f}^{//}$ είναι συνεχής στο $\mathrm{A_f}$

(ε 4) Να μελετήσετ τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^x=\mathrm{e}^{\alpha(1-x)}$ $x>0$ και $\alpha\in\mathbb{R}$

(ε 5) Να αποδείξετε ότι $4\mathrm{E}(\Omega)<3$, όπου $\mathrm{E}(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_g και την ευθεία $x=1$

$$g(x)=\begin{cases} 0 & ,x=0 \\ \dfrac{x\ln x}{1-x} & ,0<x\neq 1 \\ -1 & ,x=1 \end{cases}$$

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) $\lim\limits_{x\to 1}\mathrm{f}(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{1-x}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\ln x}{-1}=-1=\mathrm{f}(1)$,άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ οπότε είναι και συνεχής στο $\Delta=(0,+\infty)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x+1-x}{-(x-1)^2}\overset{\text{DLH}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1}{-2x}=-\frac{1}{2}=\mathrm{f}^{/}(1)$$

άρα η f είναι παργωγίσιμη στο $x_0=1$ οπότε είναι και παργωγίσιμη στο $\Delta=(0,+\infty)$

(ε 2) $$f^{/}(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x+\ln x}{(x-1)^2} & ,0<x\neq 1\\ -\dfrac{1}{2} & ,x=1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1}f^{/}(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{(x-1)^2}\overset{\text{DLH}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{2x(x-1)}=-\frac{1}{2}=f^{/}(1)$$

άρα η $f^{/}$ είναι συνεχής στο $x_0=1$ οπότε είναι και συνεχής στο $\Delta=(0,+\infty)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^{/}(x)-f^{/}(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(1-x+\ln x)+(x-1)^2}{2(x-1)^3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{f^{/}(x)-f^{/}(1)}{x-1}=\overset{\text{DLH}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{12x^2(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^{/}(x)-f^{/}(1)}{x-1}\overset{\text{DLH}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{4x}{24x(x-1)+12x^2}=\frac{1}{3}=f^{//}(1)$$

άρα η $f^{/}$ είναι παργωγίσιμη στο $x_0=1$ οπότε είναι και παργωγίσιμη στο $\Delta=(0,+\infty)$

(ε 3) $$f^{//}(x)=\begin{cases}\dfrac{-(x-1)^2-2x(1-x+\ln x)}{x(x-1)^3} & ,0<x\neq 1\\ \dfrac{1}{3} & ,x=1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1}f^{//}(x)=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)^2-2x(1-x+\ln x)}{x(x-1)^3}\overset{\text{DLH}}{=}\cdots$$

άρα η $f^{//}$ δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$ οπότε είναι δεν είναι συνεχής στο $\Delta=(0,+\infty)$

(ε 4) $\ln x \le x-1 \Leftrightarrow 1-x+\ln x \le 0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$

άρα η $f'(x)\le 0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta=(0,+\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{1-x}\overset{\text{DLH}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{-1}=-\infty$$

$\lim_{x\to0^+} x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\text{DLH}}{=}\lim_{x\to0^+}(-x)=0$, άρα

$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{1-x}=0$, οπότε $f(A_f)=(-\infty,0)$

$$x^x=e^{\alpha(1-x)}\Leftrightarrow\frac{x\ln x}{1-x}=\alpha\Leftrightarrow f(x)=\alpha$$

- Αν $\alpha\ge 0$, η εξίσωση $f(x)=\alpha$ είναι αδύνατη στο A_f
- Αν $\alpha<0$, η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μόνο μια λύση στο A_f

(ε 5) Έστω συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=-(x-1)^2-2x(1-x+\ln x)$, $\varphi(1)=0$

$\varphi'(x)=2(x-1-\ln x)\ge 0$, άρα $\varphi\nearrow$

Με $0<x<1\Rightarrow\varphi(x)<0\Rightarrow f''(x)>0$

$x>1\Rightarrow\varphi(x)>0\Rightarrow f''(x)>0$, επομένως $f''(x)>0$, άρα η συνάρτηση f , είναι κυρτή στο A_f

γιατί $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{-(x-1)^2-2(1-x+\ln x)}{x(x-1)^3} & ,0<x\ne1\\[2ex] \dfrac{1}{3} & ,x=1\end{cases}$, $f''(x)\ge 0$

οπότε και η C_g είναι κυρτή , η ευθεία $(\varepsilon):y-g(1)=g'(1)(x-1)$

$(\varepsilon):y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, οπότε $-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\le g(x)\Rightarrow g(x)\le\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$,άρα

$$\int_0^1 g(x)dx<\int_0^1\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx\Rightarrow 4E(\Omega)<3$$