ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}:\Delta=(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο Δ

$\mathrm{f}(0)=0$ και $\mathrm{f}'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{4}{(x+2)^2}$

(ε 1) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

(ε 2) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

(ε 3) Να αποδείξετε ότι η C_{f} εφάπτεται στον άξονα $x'x$

(ε 3) Να συγκρίνεται τους αριθμούς $\alpha=\ln 10^{19}$ και $\beta=\ln(9^{19}\mathrm{e}^2)$

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) $\mathrm{f}'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{4}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}\geq 0$, άρα $\mathrm{f}\nearrow$ στο Δ

(ε 2) $$\mathrm{f}''(x)=\frac{2x(x+1)(x+2)^2-x^2[(x+2)^2+2(x+1)(x+2)]}{(x+1)^2(x+2)^4}$$

$$\mathrm{f}''(x)=\frac{x(x+2)(-x^2+2x+4)}{(x+1)^2(x+2)^4}$$

$\mathrm{f}''(x)\leq 0$, για κάθε $x\in(-1,0]$ άρα f κοίλη στο $(-1,0]$

$\mathrm{f}''(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[0\,,1+\sqrt{5}]$ άρα f κυρτή στο $[0\,,1+\sqrt{5}]$

$\mathrm{f}''(x)\leq 0$, για κάθε $x\in[1+\sqrt{5},+\infty)$ άρα f κοίλη στο $[1+\sqrt{5},+\infty)$

(ε 3) $\mathrm{f}(0)=0$ και $\mathrm{f}'(0)=0$, άρα η C_{f} εφάπτεται στον άξονα $x'x$

(ε 4) $\mathrm{f}'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{4}{(x+2)^2}\Rightarrow \mathrm{f}'(x)=\left[\ln(x+1)+\dfrac{4}{x+2}\right]'$

άρα $\mathrm{f}(x)=\ln(x+1)+\dfrac{4}{x+2}+\mathrm{C}\overset{x=0}{\Rightarrow}\mathrm{C}=-2$, άρα

$\mathrm{f}(x)=\ln(x+1)+\dfrac{4}{x+2}-2\Rightarrow \mathrm{f}(x)=\ln(x+1)-\dfrac{2x}{x+2}$ και $\mathrm{f}\nearrow$ στο Δ

$$\frac{1}{9}>0\Rightarrow \mathrm{f}(\tfrac{1}{9})>0\Rightarrow \ln(\tfrac{10}{9})>\frac{2}{19}\Rightarrow 19\ln 10-19\ln 9>2\Rightarrow$$

$\Rightarrow 19\ln 10>2+19\ln 9\Rightarrow \ln 10^{19}>\ln \mathrm{e}^2+\ln 9^{19}$, άρα

$\Rightarrow \ln 10^{19}>\ln(9^{19}\mathrm{e}^2)\Rightarrow \alpha>\beta$