ΘΕΜΑ 26

Δίνεται η συνάρτηση f, με $\mathrm{f}(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^3}}\cdot\dfrac{1}{x^4}$

(ε 1) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της

(ε 2) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

(ε 3) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2}\mathrm{f}(x)+10x\geq 12$,για κάθε $x\in \mathrm{A_f}$

(ε 4) Έστω $\mathrm{E}(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται
από τη $\mathrm{C_f}$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$
τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathrm{A_f}$, ώστε $\mathrm{f}(\xi)=\mathrm{E}(\Omega)$

ενδεικτική υπόδειξη

(ε 1) $\mathrm{A_f}=(0,+\infty)$, f ωσυνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathrm{A_f}=(0,+\infty)$

$$\mathrm{f}'(x)=\frac{1}{2\varphi(x)}\Big(-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}\Big)\cdot\frac{1}{x^4}-\varphi(x)\frac{4}{x^5},\ \varphi(x)=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^3}}>0$$

$\mathrm{f}'(x)<0$, άρα η f άείναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathrm{A_f}=(0,+\infty)$

$$\mathrm{f}(\mathrm{A_f})=(\lim_{x\to+\infty}\mathrm{f}(x),\ \lim_{x\to 0^+}\mathrm{f}(x))=(0,+\infty)$$

(ε 2) $$\mathrm{f}'(x)=\frac{1}{2\varphi(x)}\Big(-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}\Big)\cdot\frac{1}{x^4}-\varphi(x)\frac{4}{x^5}$$

$$\mathrm{f}'(x)=-\varphi(x)\frac{1}{x^4}\Big[\frac{1}{2\varphi^2(x)}\frac{x^2+3}{x^4}+\frac{4}{x}\Big]$$

$$\lambda(x)=\frac{1}{2\varphi^2(x)}\frac{x^2+3}{x^4}=\frac{x^3(x^2+3)}{2(x^2+1)x^4}=\frac{x^2+3}{2x(x^2+1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda(x)=\frac{x^2+1}{2x(x^2+1)}+\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{2x}+\frac{1}{x(x^2+1)}$$

άρα η συνάρτηση λ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathrm{A_f}=(0,+\infty)$

$f'(x) = -\varphi(x)\frac{1}{x^4}\left[\lambda(x) + \frac{4}{x}\right]$.Κάθε μία από τις συναρτήσεις

$\varphi, \frac{1}{x^4}, \lambda, \frac{4}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα και παίρνει θετικές τιμές

Οπότε η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $A_f = (0, +\infty)$

άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $A_f = (0, +\infty)$

(ε 3) $f(1) = \sqrt{2}$, $f'(1) = -5\sqrt{2}$, η ευθεία $(\varepsilon): y = -5\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}$ εφαπτεται στη C_f και C_f κυρτή άρα $f(x) \geq -5\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}$

άρα $\sqrt{2}f(x) + 10x \geq 12$,για κάθε $x \in A_f$

(ε 4) $f(x) > 0$,για κάθε $x \in A_f$ οπότε $E(\Omega) = \int_1^2 f(x)dx = F(2) - F(1)$ το F μια αρχική της f , η F ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[1,2]$,άρα υπάρχει $\xi \in (1,2)$ ώστε $F'(\xi) = F(2) - F(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\xi) = E(\Omega)$