ΘΕΜΑ 25

Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}:\Delta=(0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$, με $\mathrm{f}(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

(ε 1) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της

(ε 2) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

(ε 3) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\mathrm{f}(x)}{\varepsilon\varphi^2 x}$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{f}(x)}{\varepsilon\varphi^2 x}$

(ε 4) Να εξετάσετε αν το σημείο $\mathrm{K}\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ είναι κέντρο συμμετρίας της γραφικής παράστασης $C_{\mathrm{f}^{//}}$ της συνάρτησης $\mathrm{f}^{//}$

(ε 5) Να υπολογίσετε το $\mathrm{I}=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\mathrm{f}(x)\varepsilon\varphi^2 x\,dx$

ενδεικτική υπόδειξη

(ε 1) $\mathrm{f}^{/}(x)=(1+\varepsilon\varphi^2 x)\varepsilon\varphi x+(1+\sigma\varphi^2 x)\sigma\varphi x>0$,για κάθε $x\in\Delta$

$$\mathrm{f}(\Delta)=(\lim_{x\to 0^+}\mathrm{f}(x),\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\mathrm{f}(x))=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

(ε 2) $\frac{1}{2}\mathrm{f}^{//}(x)=(\varepsilon\varphi^2 x-\sigma\varphi^2 x)+(\varepsilon\varphi^4 x-\sigma\varphi^4 x)$

$\frac{1}{2}\mathrm{f}^{//}(x)=(\varepsilon\varphi x-\sigma\varphi x)(1+\varepsilon\varphi^2 x+\sigma\varphi^2 x)(\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x)$

$\varepsilon\varphi x-\sigma\varphi x>0 \overset{0<x<\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow} \varepsilon\varphi^2 x>1 \overset{0<x<\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow} \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$, άρα $\mathrm{f}^{//}(x)>0$

για κάθε $x\in\Delta 1=(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ και $\mathrm{f}^{//}(x)<0$, για κάθε $x\in\Delta 2=(0,\frac{\pi}{4})$

(ε 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\mathrm{f}(x)}{\varepsilon\varphi^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2\eta\mu^2 x-1}{\eta\mu^4 x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{f}(x)}{\varepsilon\varphi^2 x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\eta\mu^2 x-1}{\eta\mu^4 x}=-\infty$

(ε 4) Είναι $\mathrm{f}^{//}(x)+\mathrm{f}^{//}(\frac{\pi}{2}-x)=0$, άρα το σημείο $\mathrm{K}\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ είναι κέντρο συμμετρίας της $C_{\mathrm{f}^{//}}$

(ε 5) $\mathrm{f}(x)\varepsilon\varphi^2 x=(\varepsilon\varphi x)^{/}\varepsilon\varphi^2 x-(\varepsilon\varphi x)^{/}$, άρα $\mathrm{I}=\frac{1}{3}\left[\varepsilon\varphi^3 x\right]_{\pi/4}^{\pi/3}-\left[\varepsilon\varphi x\right]_{\pi/4}^{\pi/3}$