ΘΕΜΑ 23

Δίνεται η συνάρτηση f, με $\mathrm{f}(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x+5}}$

(ε 1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και το $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{f}(x)$

(ε 2) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

(ε 3) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mathrm{y}_0\in(-\infty,0)$ υπάρχει μοναδικό $x_0\in \mathrm{A}_{\mathrm{f}'}$, ώστε $\mathrm{f}'(x_0)=\mathrm{y}_0$

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) $\mathrm{A_f}=[-2,+\infty)$, $\mathrm{f}(x)=\dfrac{1}{(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+5})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2})}>0$

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{f}(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+5})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2})}=0$$

(ε 2) $\mathrm{f}(x)=(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+5})$

$$\varphi(x)=\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}>0\Rightarrow \varphi'(x)=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}\sqrt{x+2}}<0,\ x>-2$$

$$g(x)=\sqrt{x+6}-\sqrt{x+5}>0\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+5}\sqrt{x+6}}<0\ ,x>-2$$

$$\mathrm{f}(x)=\varphi(x)g(x)\Rightarrow \mathrm{f}'(x)=\varphi'(x)g(x)+\varphi(x)g'(x)<0,x>-2$$

άρα η f είναι $\searrow$ στο $\mathrm{A_f}$, οπότε $\mathrm{f}(\mathrm{A_f})=\left(0,\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right]$

$$\varphi'(x)g(x)=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}\sqrt{x+2}}(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+5})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(x)g(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}\sqrt{x+2}}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x+5}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(x)g(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+3}\sqrt{x+2}}\,\mathrm{f}(x)$$

$$\varphi(x)g'(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})\,\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+5}\sqrt{x+6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x)g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+5}\sqrt{x+6}}\,\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x)g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+5}\sqrt{x+6}}\,\mathrm{f}(x)$$

$$\mathrm{f}'(x) = \varphi'(x)g(x) + \varphi(x)g'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{f}'(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{f}(x)\Big(\frac{1}{\sqrt{x+3}\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+5}\sqrt{x+6}}\Big),$$ οπότε

$$\Rightarrow \mathrm{f}'(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{f}(x)\lambda(x),\ \lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+5}\sqrt{x+6}}$$

$$\mathrm{f}''(x) = -\frac{1}{2}(\mathrm{f}'(x)\lambda(x) + \mathrm{f}(x)\lambda'(x))$$

Όμως $\mathrm{f}'(x) < 0$, $\mathrm{f}(x) > 0$, $\lambda(x) > 0$, $\lambda'(x) < 0$, άρα $\mathrm{f}''(x) > 0$

Οπότε η f' είναι $\nearrow$, άρα η f είναι κυρτή

(ε 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{f}'(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to-2}\mathrm{f}'(x) = -\infty$ και f' συνεχής

άρα $\mathrm{f}'(\mathrm{A}_{\mathrm{f}'}) = (-\infty, 0)$,οπότε για κάθε $\mathrm{y}_0 \in (-\infty, 0)$ υπάρχει

$x_0 \in \mathrm{A}_{\mathrm{f}'}$, ώστε $\mathrm{f}'(x_0) = \mathrm{y}_0$ και x_0 μοναδικό στο $\mathrm{A}_{\mathrm{f}'}$

γιατί η f' είναι $\nearrow$ στο $\mathrm{A}_{\mathrm{f}'}$

ή

(ε 1) $A_f=[-2,+\infty)$, $f(x)=\dfrac{1}{(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+5})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2})}>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+5})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2})}=0$

Η συνάρτηση κ, με $\kappa(x)=(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+5})(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})>0$

είναι $\nearrow$ στο $A_f=[-2,+\infty)$, άρα η f είναι $\searrow$ στο A_f

(ε 2) Έστω οι συναρτήσεις φ, g με τύπους $\varphi(x)=\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}>0$

και $g(x)=\sqrt{x+6}+\sqrt{x+5}>0$, ορισμένες στο $A_f=[-2,+\infty)$

$\varphi'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}<0$, για κάθε $x\in(-2,+\infty)$

$\varphi''(x)=-\dfrac{1}{4(x+3)\sqrt{x+3}}+\dfrac{1}{4(x+2)\sqrt{x+2}}>0$, για κάθε $x\in(-2,+\infty)$

$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+6}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}>0$, για κάθε $x\in(-2,+\infty)$

$g''(x)=-\dfrac{1}{4(x+6)\sqrt{x+6}}-\dfrac{1}{4(x+5)\sqrt{x+5}}<0$, για κάθε $x\in(-2,+\infty)$

$f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{g(x)}>0 \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\varphi'(x)g(x)-\varphi(x)g'(x)}{g^2(x)}<0$

$g^2(x)f''(x)=\varphi''(x)g(x)-\varphi(x)g''(x)-2g(x)g'(x)f'(x)>0$

άρα $f''(x)>0$, για κάθε $x\in(-2,+\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή στο A_f

(ε 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to-2} f'(x)=-\infty$ και f' συνεχής

άρα $f'(A_{f'})=(-\infty,0)$, οπότε για κάθε $y_0\in(-\infty,0)$ υπάρχει

$x_0\in A_{f'}$, ώστε $f'(x_0)=y_0$ και x_0 μοναδικό στο $A_{f'}$

γιατί η f' είναι $\nearrow$ στο $A_{f'}$