Ε1 Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, $\mathrm{f}(0)\le\alpha$

και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν $\mathrm{f}^{//}(x)+\mathrm{f}^{/}(x)+\mathrm{f}(x)=\alpha$

$\mathrm{f}(x)\ge\alpha$

(ε 1) Να βρείτε την τιμή της $\mathrm{f}^{//}$ στο $x_0=0$

(ε 2) Να βρείτε τον τύπο της f

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\mathrm{f}(x)\ge\alpha\overset{x=0}{\Rightarrow}\mathrm{f}(0)\ge\alpha\Rightarrow$

$\Rightarrow\mathrm{f}(0)=\alpha$, οπότε $\mathrm{f}(x)\ge\mathrm{f}(0)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

άρα από Θ .Fermat $\mathrm{f}^{/}(0)=0$

$\mathrm{f}^{//}(0)+\mathrm{f}^{/}(0)+\mathrm{f}(0)=\alpha\Rightarrow\mathrm{f}^{//}(0)=0$

(ε 2) $\mathrm{f}^{//}(x)+\mathrm{f}^{/}(x)=\alpha-\mathrm{f}(x)\le 0$, άρα $\mathrm{f}^{//}(x)+\mathrm{f}^{/}(x)\le 0$

$\mathrm{e}^{x}\mathrm{f}^{//}(x)+\mathrm{e}^{x}\mathrm{f}^{/}(x)\le 0\Rightarrow(\mathrm{e}^{x}\mathrm{f}^{/}(x))^{/}\le 0$

Έστω g, με $g(x)=\mathrm{e}^{x}\mathrm{f}^{/}(x)$, $g^{/}(x)\le 0$

Με $x\ge 0\Rightarrow g(x)\le 0\Rightarrow\mathrm{f}^{/}(x)\le 0\Rightarrow\mathrm{f}(x)\le\mathrm{f}(0)$

Με $x\le 0\Rightarrow g(x)\ge 0\Rightarrow\mathrm{f}^{/}(x)\ge 0\Rightarrow\mathrm{f}(x)\le\mathrm{f}(0)$

Τελικά $\mathrm{f}(x)\le\mathrm{f}(0)=\alpha$, άρα $\mathrm{f}(x)=\alpha$

Ε2 Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, $\mathrm{f}(1)=1$
και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}'(2-x)=\mathrm{C}\neq 0$ **(1)**

(ε 1) Να βρείτε τη θέση της $\mathrm{C_f}$ ως προς τον $x'x$

(ε 2) Να αποδείξετε ότι η f' είναι συνεχής και "$1-1$"

(ε 3) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη

(ε 4) Αν $\mathrm{f}''(1)=1/\mathrm{C}$, τότε να βρείτε τον τύπο της f

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) f συνεχής και $\mathrm{f}(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο με $\mathrm{f}(1)=1$,οπότε $\mathrm{f}(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η $\mathrm{C_f}$ είναι πάνω από τον άξονα $x'x$

(ε 2) Από **(1)** $\Rightarrow \mathrm{f}'(2-x)=\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{f}(x)} \overset{x\to 2-x}{\Rightarrow} \mathrm{f}'(x)=\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{f}(2-x)}$

άρα η f' είναι συνεχής .

Αν η f δεν είναι "$1-1$" , τότε υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Με $\alpha\neq\beta$ ώστε $\mathrm{f}(\alpha)=\mathrm{f}(\beta) \overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \mathrm{f}'(\xi)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{f}(2-\xi)\mathrm{f}'(\xi)=0$ άτοπο ,άρα η f είναι "$1-1$"

οπότε και η f' είναι "$1-1$"

(ε 3) Από **(1)** $\overset{x\to 2-x}{\Rightarrow} \mathrm{f}(2-x)\mathrm{f}'(x)=\mathrm{C}$ **(2)**

f' συνεχής και $\mathrm{f}'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο , οπότε η f είναι γνησίως μονότονη στο $x\in\mathbb{R}$

(ε 4) Αφαιρούμε τις **(2)** , **(1)** οπότε έχουμε

$$f(2-x)f'(x)-f(x)f'(2-x)=0\Rightarrow$$

$$f(2-x)f'(x)+f(x)(f(2-x))'=0\Rightarrow$$

$$(f(2-x)f(x))'=0\Rightarrow f(2-x)f(x)=C_0\overset{x=1}{\Rightarrow}C_0=1$$

άρα $f(2-x)f(x)=1\Rightarrow f(2-x)=\frac{1}{f(x)}$ και από **(2)**

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=C\Rightarrow(\ln f(x))'=C\Rightarrow\ln f(x)=Cx+\kappa$$

$$\overset{x=1}{\Rightarrow}\kappa=-C\Rightarrow\ln f(x)=Cx-C\Rightarrow f(x)=e^{Cx-C}$$

άρα $f'(x)=Ce^{Cx-C}\Rightarrow f''(x)=C^2e^{Cx-C}\overset{x=1}{\Rightarrow}$

$$\overset{x=1}{\Rightarrow}\frac{1}{C}=C^2\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=e^{x-1}$$

Ε3 Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)f'(2-x)=1$ **(1)** ,για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και A, B τα σύνολα τιμών των f, f' αντίστοιχα με $A\cap B\neq\varnothing$

(ε 1) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

(ε 2) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον κ, ρ ώστε $f(\kappa)=1=f'(\rho)$

(ε 3) Αν $f(0)=e^{-1}$ και $f(1)=1$, τότε να βρείτε τον τύπο της f

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) Από **(1)** $\Rightarrow f'(x)f(2-x)=1$.**(2)** , $f \nearrow \mathbb{R}$,άρα $f'(x)>0$ οπότε και $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Η συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=2-x$ είναι γνησίως φθίνουσα , άρα η συνάρτηση $f\circ\varphi$ είναι γνησίως φθίνουσα και από τη σχέση **(2)** $f'(x)=\dfrac{1}{f(2-x)}$, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα , άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

(ε 2) Η ευθεία $(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1)$ εφάπτεται στη C_f , άρα

$$f(x)\geq f'(1)(x-1)+f(1),\ \lim_{x\to+\infty}(f'(1)(x-1)+f(1))=+\infty$$

άρα $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\overset{(1)}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty}f'(2-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$

$2-x=u$, με $x\to+\infty\Rightarrow u\to-\infty$, άρα $\displaystyle\lim_{u\to-\infty}f'(u)=0$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα και $f'(x)>0$, άρα $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\alpha\geq 0$

- Αν $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, τότε $\lim\limits_{u\to+\infty} f^{/}(u)=+\infty$, άρα

  $A=B$, $1\in A=B$,οπότε υπάρχουν κ,ρ ώστε

  $f(\kappa)=1=f^{/}(\rho)$

- Αν $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\alpha>0$,τότε $\lim\limits_{u\to+\infty} f^{/}(u)=\frac{1}{\alpha}$

  οπότε $A=(\alpha,+\infty)$ και $B=(0,\frac{1}{\alpha})$

  Έστω $\alpha>1$ τότε $\frac{1}{\alpha}<1$ οπότε $A\bigcap B=\varnothing$,άτοπο

  άρα $\alpha<1\Rightarrow\frac{1}{\alpha}>1$, οπότε $1\in A$ και $1\in B$,άρα

  υπάρχουν κ,ρ ώστε $f(\kappa)=1=f^{/}(\rho)$

(ε 3) $f(x)f^{/}(2-x)=1\Rightarrow f^{/}(x)f(2-x)=1$, αφαίρεση κατά μέλη $f^{/}(x)f(2-x)-f^{/}(2-x)f(x)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow(f(2-x)f(x))^{/}=0\Rightarrow\ \Rightarrow$

$f(2-x)f(x)=C\Rightarrow f(2-x)=\frac{C}{f(x)}$, αντικατάσταση

στην (2), οπότε $\frac{f^{/}(x)}{f(x)}=\frac{1}{C}\Rightarrow(\ln f(x))^{/}=(\frac{x}{C})^{/}\Rightarrow$

$\Rightarrow\ln f(x)=\frac{x}{C}+C_0$, $f(0)=e^{-1}$ και $f(1)=1$

άρα $f(x)=e^{x-1}$

Ε4 Έστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\Delta=(0,+\infty)$ και για κάθε $x\in\Delta$,ισχύει $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}'(\frac{1}{x})=\alpha^2\nu x$ **(1)**, όπου $\nu\in\mathbb{N}$ και $\mathrm{f}(1)=\alpha>0$

(ε 1) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

(ε 2) Να βρείτε τον τύπο της f

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) Από την **(1)** $\mathrm{f}(x)\neq 0$, οπότε $\mathrm{f}(x)>0$, άρα $\mathrm{f}'(\frac{1}{x})$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

(ε 2) Από **(1)** $\overset{x\to 1/x}{\Rightarrow} \mathrm{f}'(x)\mathrm{f}(\frac{1}{x})=\alpha^2\nu\frac{1}{x}$ **(2)**.

Από **(1)** $-\frac{1}{x^2}\mathrm{f}(x)\mathrm{f}'(\frac{1}{x})=-\alpha^2\nu\frac{1}{x}\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{f}(x)(\mathrm{f}(\frac{1}{x}))'=-\alpha^2\nu\frac{1}{x}$ **(3)**..Προσθέτουμε τις **(2)**,**(3)**.

$\mathrm{f}'(x)\mathrm{f}(\frac{1}{x})+\mathrm{f}(x)(\mathrm{f}(\frac{1}{x}))'=0\Rightarrow(\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(\frac{1}{x}))'=0$, οπότε

$\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(\frac{1}{x})=\mathrm{C}\overset{x=1}{\Rightarrow}\mathrm{C}=\alpha^2\Rightarrow\mathrm{f}(\frac{1}{x})=\frac{\alpha^2}{\mathrm{f}(x)}$,αντικαθιστούμε

στην **(2)** $(\ln\mathrm{f}(x))'=(\nu\ln x)'\Rightarrow\ln\mathrm{f}(x)=\ln x^\nu+\mathrm{C}$

άρα $\ln\mathrm{f}(1)=\ln 1^\nu+\mathrm{C}\Rightarrow\mathrm{C}=\ln\mathrm{f}(\alpha)$, οπότε

$\ln\mathrm{f}(x)=\ln x^\nu+\ln\alpha=\ln\alpha x^\nu\Rightarrow\mathrm{f}(x)=\alpha x^\nu$

Ε5 Έστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ $\mathrm{f}(0)=0=\mathrm{f}'(0)$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}'(\alpha-x)=0$ **(1)**

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτηση f

ενδεικτική απάντηση

Στην **(1)** αντικατάσταση του x με $\alpha-x$, οπότε αντικατάσταση

$\mathrm{f}(\alpha-x)+\mathrm{f}'(x)=0\Rightarrow-\mathrm{f}'(\alpha-x)+\mathrm{f}''(x)=0$ τ**(2)**, από

(1), (2) με πρόσθεση κατά μέλη $\mathrm{f}''(x)+\mathrm{f}(x)=0$ και **ΓΠ1**

Ε6 Έστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ $\mathrm{f}(0)=0=\mathrm{f}'(0)$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\mathrm{f}(x)+\kappa\mathrm{f}'(\alpha-x)=0$**(1)**

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτηση f

ενδεικτική απάντηση

Στην **(1)** αντικατάσταση του x με $\alpha-x$, οπότε αντικατάσταση

$\mathrm{f}(\alpha-x)+\kappa\mathrm{f}'(x)=0\Rightarrow-\mathrm{f}'(\alpha-x)+\kappa\mathrm{f}''(x)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow-\kappa\mathrm{f}'(\alpha-x)+\kappa^2\mathrm{f}''(x)=0$ **(2)**, από **(1), (2)** με

πρόσθεση κατά μέλη $\kappa^2\mathrm{f}''(x)+\mathrm{f}(x)=0$ και **Γ**

Ε7 Έστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ $\mathrm{f}(0)=0,\mathrm{f}'(0)=1$

Και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}'(\frac{\pi}{2}-x)=0$**(1)**

Να αποδείξετε $\mathrm{f}(x)=\eta\mu x$

ενδεικτική απάντηση

Στην **(1)** αντικατάσταση του x με $\frac{\pi}{2}-x$, οπότε

$\mathrm{f}(\frac{\pi}{2}-x)-\mathrm{f}'(x)=0\Rightarrow-\mathrm{f}'(\frac{\pi}{2}-x)-\mathrm{f}''(x)=0$ **(2)**, από

(1), (2) με αφαίρεση κατά μέλη $\mathrm{f}''(x)+\mathrm{f}(x)=0$ και **ΓΠ2**