ΘΕΜΑ 16

Δίνεται η συνάρτηση $f:\Delta=[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν

- $\kappa f^{/}(x)f^{//}(x)=(f(x))^2$ **(1)**, για κάθε $x\in\Delta$, $\kappa>0$
- $f(0)=1=f^{//}(0)$
- Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο Δ

(ε 1) Να αποδείξετε ότι η $f^{/}$ είναι "$1-1$"

(ε 2) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=x+1$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$, τότε

(ε 3) Να αποδείξετε $f(x)>x$, για κάθε $x\in\Delta$

και να βρείτε το σύνολο τιμών της f

(ε 4) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) Έστω ότι η $f^{/}$ δεν είναι "$1-1$", τότε υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\alpha,\beta\in\Delta$, με $\alpha\neq\beta$ ώστε $f(\alpha)=f(\beta)$

άρα από το Θ .Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f^{//}(\xi)=0$

οπότε $f(\xi)=0$ επομένως, ξ η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[0,\xi]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(0,\xi)$

$$f^{/}(\rho)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=-\frac{1}{\xi}<0 \text{ και } f^{/}(0)=\frac{1}{\kappa}>0$$

$f^{/}(\rho)f^{/}(0)<0$, οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,\rho)$ ώστε $f^{/}(x_0)=0\Rightarrow f(x_0)=0$, άτοπο οπότε η συνάρτηση $f^{/}$ είναι "$1-1$"

(ε 2) Έστω $\xi \in \Delta$ ώστε $f'(\xi)=0$, τότε $f(\xi)=0$ επομένως ξ η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[0,\xi]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (0,\xi)$

$$f'(\rho)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=-\frac{1}{\xi}<0 \text{ και } f'(0)=\frac{1}{\kappa}>0$$

$f'(\rho)f'(0)<0$, οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,\rho)$ ώστε $f'(x_0)=0 \Rightarrow f(x_0)=0$, άτοπο οπότε $f'(x) \neq 0$ και f' με $f'(0)=\dfrac{1}{\kappa}>0$, άρα $f'(x)>0$, για κάθε $x \in \Delta$

$f''(x)=\dfrac{(f(x))^2}{\kappa f'(x)}>0$, άρα f'' συνεχής

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο Δ

Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=x+1$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$, τότε

(ε 3) Η f είναι κυρτή και η $(\varepsilon): y=x+1$ εφάπτεται στη C_f άρα $f(x) \geq x+1>x$, για κάθε $x \in \Delta$

Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής Δ , οπότε

$f(\Delta)=[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))$, $f(0)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, οπότε $f(\Delta)=[1,+\infty)$

(ε 4) $\mathrm{f}^{/}(0)=\dfrac{1}{\kappa}$ και $\mathrm{f}^{/}(0)=1$, άρα $\kappa=1$, οπότε για κάθε

$x\in\Delta$ είναι $\mathrm{f}^{/}(x)\mathrm{f}^{//}(x)=(\mathrm{f}(x))^{2}>0\Leftrightarrow\dfrac{\mathrm{f}^{/}(x)}{\mathrm{f}(x)}=\dfrac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{f}^{//}(x)}$

Έστω $\dfrac{\mathrm{f}^{/}(x)}{\mathrm{f}(x)}\geq 1$ **(2)** , τότε και $\dfrac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{f}^{//}(x)}\geq 1$ **(3)**

Από **(2)** $\Rightarrow \mathrm{f}^{/}(x)-\mathrm{f}(x)\geq 0\Rightarrow(\mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x))^{/}\geq 0$, οπότε
η συνάρτηση A ,με $\mathrm{A}(x)=\mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x)$ είναι γνησίως αύξουσα

στο Δ ,με $x\geq 0\Rightarrow \mathrm{A}(x)\geq \mathrm{A}(0)=1$, για κάθε $x\in\Delta$
οπότε $\mathrm{f}(x)\geq \mathrm{e}^{x}$, , για κάθε $x\in\Delta$

Από **(3)** $\Rightarrow \mathrm{f}^{//}(x)+\mathrm{f}^{/}(x)-(\mathrm{f}^{/}(x)+\mathrm{f}(x))\leq 0$, θεωρούμε
τη συνάρτηση οπότε B , με $\mathrm{B}(x)=\mathrm{f}^{/}(x)+\mathrm{f}(x)$, $\mathrm{B}(0)=2$
οπότε $\mathrm{B}^{/}(x)-\mathrm{B}(x)\leq 0\Rightarrow(\mathrm{e}^{-x}\mathrm{B}(x))^{/}\leq 0$, άρα η συνάρτηση

$\mathrm{B1}$, με $\mathrm{B1}(x)=\mathrm{e}^{-x}\mathrm{B}(x)$,είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ

με $x\geq 0\Rightarrow \mathrm{B1}(x)\leq \mathrm{B1}(0)=2\Rightarrow \mathrm{e}^{-x}\mathrm{B}(x)\leq 2\Rightarrow \mathrm{B}(x)\leq 2\mathrm{e}^{x}$

οπότε $\mathrm{f}^{/}(x)+\mathrm{f}(x)\leq 2\mathrm{e}^{x}\Rightarrow(\mathrm{e}^{x}\mathrm{f}(x)-\mathrm{e}^{2x})^{/}\leq 0$, άρα

η συνάρτηση Γ, με $\Gamma(x)=\mathrm{e}^{x}\mathrm{f}(x)-\mathrm{e}^{2x}$ είναι γνησίως φθίνουσα

με $x\geq 0\Rightarrow\Gamma(x)\leq\Gamma(0)=0\Rightarrow \mathrm{e}^{x}\mathrm{f}(x)-\mathrm{e}^{2x}\leq 0\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{f}(x)\leq \mathrm{e}^{x}$, άρα $\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{x}$

Όμοια , όταν $\dfrac{\mathrm{f}^{/}(x)}{\mathrm{f}(x)}\leq 1$ **(4)** , τότε και $\dfrac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{f}^{//}(x)}\leq 1$ **(5)**