ΘΕΜΑ 14

Δίνεται η μη σταθερή και παραγωγίσιμη στο 1 συνάρτηση $\mathrm{f}:\Delta=(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$,για την οποία ισχύει ότι

$\mathrm{f}(x\mathrm{y})=\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(\mathrm{y})$ **(1)** , για κάθε $x,\mathrm{y}\in\Delta$ και η ευθεία

$(\varepsilon):\mathrm{y}=3x-2$ εφάπτεται στη $\mathrm{C_f}$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{f}(x)>0$, για κάθε $x\in\Delta$

(ε 2) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο Δ

(ε 3) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ

(ε 4) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία

(ε 5) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

ενδεικτική απάντηση

(ε 1) Έστω $\rho\in\mathbb{R}$, ώστε $\mathrm{f}(\rho)=0$, τότε από την **(1)** για $\mathrm{y}=\rho$ και $x=\dfrac{x}{\rho}$ έχουμε $\mathrm{f}(x)=0$, για κάθε $x\in\Delta$, άτοπο

άρα $\mathrm{f}(x)\neq 0$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$

από την **(1)** για $\mathrm{y}=x$ έχουμε $\mathrm{f}(x^2)=\mathrm{f}^2(x)>0 \overset{x\rightarrow\sqrt{x}}{\Rightarrow}$

$\overset{x\rightarrow\sqrt{x}}{\Rightarrow} \mathrm{f}(x)>0$,,για κάθε $x\in\Delta$

(ε 2) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, άρα είναι συνεχής στο $x_0=1$, οπότε $\lim\limits_{x\rightarrow 1}\mathrm{f}(x)=\mathrm{f}(1)$ **(2)**

από την **(1)** $\overset{x=1=\mathrm{y}}{\Rightarrow} \mathrm{f}(1)=\mathrm{f}(1)\mathrm{f}(1)\Rightarrow\mathrm{f}(1)=0$ **ή** $\mathrm{f}(1)=1$

Έστω $\mathrm{f}(1)=0$, από την **(1)** $\overset{\mathrm{y}=1}{\Rightarrow}\mathrm{f}(x)=0$, άτοπο

άρα $\mathrm{f}(1)=1$, από την **(2)** $\Rightarrow\lim\limits_{x\rightarrow 1}\mathrm{f}(x)=1$

Έστω $\rho\in\Delta$ και $\dfrac{x}{\rho}=\mathrm{u}\Leftrightarrow x=\mathrm{u}\rho$, όταν $x\rightarrow\rho$,τότε $\mathrm{u}\rightarrow 1$

οπότε $\lim\limits_{x\rightarrow\rho}\mathrm{f}(x)=\lim\limits_{\mathrm{u}\rightarrow 1}\mathrm{f}(\mathrm{u}\rho)\overset{(1)}{=}\lim\limits_{\mathrm{u}\rightarrow 1}(\mathrm{f}(\mathrm{u})\mathrm{f}(\rho))=\mathrm{f}(\rho)$

άρα η f είναι συνεχής στο Δ

(ε 3) Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, $\mathrm{f}^{/}(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{f}(x)-1}{x-1}$

Έστω $\rho\in\Delta$ και $\dfrac{x}{\rho}=\mathrm{u}\Leftrightarrow x=\mathrm{u}\rho$, όταν $x\to\rho$,τότε $\mathrm{u}\to 1$

άρα $\lim\limits_{x\to\rho}\dfrac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(\rho)}{x-\rho}=\lim\limits_{\mathrm{u}\to 1}\dfrac{\mathrm{f}(\mathrm{u}\rho)-\mathrm{f}(\rho)}{\mathrm{u}\rho-\rho}\overset{(1)}{=}\lim\limits_{\mathrm{u}\to 1}\dfrac{(\mathrm{f}(\mathrm{u})-1)\mathrm{f}(\rho)}{(\mathrm{u}-1)\rho}$

άρα $\lim\limits_{x\to\rho}\dfrac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(\rho)}{x-\rho}=\lim\limits_{\mathrm{u}\to 1}\dfrac{(\mathrm{f}(\mathrm{u})-1)\mathrm{f}(\rho)}{(\mathrm{u}-1)\rho}=\mathrm{f}^{/}(1)\dfrac{\mathrm{f}(\rho)}{\rho}$

οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο ρ , άρα είναι παραγωγίσιμη στο Δ και $\mathrm{f}^{/}(x)=\mathrm{f}^{/}(1)\dfrac{\mathrm{f}(x)}{x}$.**(3)**

(ε 4) Η $\mathrm{f}^{/}$ είναι συνεχής αν $\mathrm{f}^{/}(1)=0$, τότε $\mathrm{f}^{/}(x)=0$ άρα η f είναι σταθερή , άτοπο , οπότε $\mathrm{f}^{/}(x)\neq 0$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο .

Έστω $\mathrm{M}(\alpha,\mathrm{f}(\alpha))$ το σημείο επαφής της (ε) με τη C_{f}

τότε $\mathrm{f}^{/}(\alpha)=3$, άρα $\mathrm{f}^{/}(x)>0$, για κάθε $x\in\Delta$

οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

(ε 5) $\mathrm{f}^{/}(x)=\mathrm{f}^{/}(1)\dfrac{\mathrm{f}(x)}{x}$, $\mathrm{f}^{/}$ παραγωγίσιμη , οπότε έχουμε

$$\mathrm{f}^{//}(x)=\mathrm{f}^{/}(1)\frac{x\mathrm{f}^{/}(x)-\mathrm{f}(x)}{x^2}\overset{(3)}{=}\frac{\mathrm{f}^{/}(1)(\mathrm{f}^{/}(1)-1)\mathrm{f}(x)}{x^2}$$

Αν $\mathrm{f}^{/}(1)-1=0$, τότε $\mathrm{f}^{//}(x)=0\Rightarrow\mathrm{f}^{/}(x)=\mathrm{C}\overset{x=\alpha}{\Rightarrow}$

$\overset{x=\alpha}{\Rightarrow}\mathrm{C}=3\Rightarrow\mathrm{f}^{/}(x)=3\Rightarrow\mathrm{f}(x)=3x+\mathrm{d}\overset{x=1}{\Rightarrow}\mathrm{d}=-2$

Οπότε $\mathrm{f}(x)=3x-2$,που δεν επαληθεύει την **(1)**,άρα

$\mathrm{f}^{/}(1)-1\neq 0$, $\mathrm{f}^{//}(x)\neq 0$ και $\mathrm{f}^{//}$ συνεχής , άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο , οπότε η f είναι ή κυρτή ή κοίλη στο Δ

Από την **(3)** έχουμε $\mathrm{f}(x)=x^{\mathrm{f}^{/}(1)}$

Έστω f κυρτή , τότε $\mathrm{f}(x)\geq 3x-2\Rightarrow x^{\mathrm{f}^{/}(1)}-3x+2\geq 0$

Έστω φ, με $\varphi(x)=x^{f'(1)}-3x+2\geq 0=\varphi(1)$

Οπότε από Fermat $\varphi'(1)=0\Rightarrow f'(1)=3$

Όμοια αν η f είναι κοίλη $f'(1)=3$, άρα $f(x)=x^3$

Οπότε η C_f είναι κυρτή στο Δ