ΘΕΜΑ 13

Δίνεται η μη σταθερή και παραγωγίσιμη στο 0 (μηδέν) συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι
$f(x+y)=f(x)f(y)$ **(1)**, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

(ε1) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(ε2) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

(ε3) Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=2x+1$ εφάπτεται στη C_f τότε να βρείτε τον τύπο της f

ενδεικτική απάντηση

(ε1) Έστω $\rho\in\mathbb{R}$, ώστε $f(\rho)=0$, τότε από την **(1)** για $y=\rho$ και $x=x-\rho$ έχουμε $f(x)=0$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άτοπο
άρα $f(x)\neq 0$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$
από την **(1)** για $y=x$ έχουμε $f(2x)=f^2(x)>0$
οπότε για $x=x/2 \Rightarrow f(x)>0$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(ε2) Από την **(1)** για $y=x=0$ έχουμε $f(0)=f^2(0)\overset{f(0)\neq 0}{\Rightarrow}$ Να

$\overset{f(0)\neq 0}{\Rightarrow} f(0)=1.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=f'(0)$, έστω $x_0\in\mathbb{R}$,τότε

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(u+x_0)-f(x_0)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{f(u)f(x_0)-f(x_0)}{u}=f'(0)f(x_0)$$

Οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,με $f'(x)=f'(0)f(x)$

(ε3) Από την **(1)** παραγωγίζοντας ως προς x ,έχουμε ότι
$f'(x+y)=f'(x)f(y)\underset{x=0}{\overset{y=x}{\Rightarrow}} f'(x)=f'(0)f(x)$, οπότε
$e^{-xf'(0)}f(x)=C\Rightarrow f(x)=Ce^{xf'(0)}$, άρα $f(y)=Ce^{yf'(0)}$
και $f(x+y)=Ce^{(x+y)f'(0)}$ και λόγω της **(1)** $\Rightarrow C=C^2$
οπότε έχουμε $C=1\Rightarrow f(x)=e^{xf'(0)}\Rightarrow f'(x)=f'(0)e^{xf'(0)}$

Έστω $\mathrm{M}(\alpha,\mathrm{f}(\alpha))$ το σημείο επαφής της (ε) με τη C_f, τότε

$(\varepsilon): y = x\mathrm{f}'(\alpha)+\mathrm{f}(\alpha)-\alpha\mathrm{f}'(\alpha)$, άρα $\mathrm{f}(\alpha)-\alpha\mathrm{f}'(\alpha)=1$

και $\mathrm{f}'(\alpha)=2$ **(2)** και $\mathrm{f}(\alpha)=2\alpha+1$ **(3)**, οπότε

$e^{\alpha \mathrm{f}'(0)}=2\alpha+1 \Leftrightarrow e^{\alpha \mathrm{f}'(0)}-2\alpha-1=0$ **(4)**

$\mathrm{f}'(0)e^{\alpha \mathrm{f}'(0)}=2 \Leftrightarrow \mathrm{f}'(0)e^{\alpha \mathrm{f}'(0)}-2=0$ **(5)**

(4) $\Rightarrow \mathrm{f}'(0)e^{\alpha \mathrm{f}'(0)}-(2\alpha+1)\mathrm{f}'(0)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{f}'(0)e^{\alpha \mathrm{f}'(0)}=(2\alpha+1)\mathrm{f}'(0)$ οπότε η **(5)**

γίνεται $(2\alpha+1)\mathrm{f}'(0)-2=0 \Rightarrow 2\alpha\mathrm{f}'(0)=2-\mathrm{f}'(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha\mathrm{f}'(0)=\dfrac{2-\mathrm{f}'(0)}{2} \overset{(5)}{\Rightarrow} \mathrm{f}'(0)e^{\frac{2-\mathrm{f}'(0)}{2}}-2=0$ **(6)**

Θεωρούμε συνάρτηση λ, με $\lambda(x)=xe^{\frac{2-x}{2}}-2$, $\lambda(\mathrm{f}'(0))=0$

$\lambda'(x)=e^{\frac{2-x}{2}}-\frac{x}{2}e^{\frac{2-x}{2}}=e^{\frac{2-x}{2}}(\frac{2-x}{2})$, $\lambda'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 2$

άρα $\lambda \nearrow$ στο $(-\infty,2)$ και $\lambda \searrow$ στο $(2,+\infty)$ και $\lambda(2)=0$

οπότε η $x=2$ μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\lambda(x)=0$, όμως

και $\lambda(\mathrm{f}'(0))=0$, άρα $\mathrm{f}'(0)=2$, οπότε $\mathrm{f}(x)=e^{2x}$