ΘΕΜΑ 11

Δίνονται η συνάρτηση $f:\Delta=[-1,1]\to\mathbb{R}$

$f(-1)=f(0)=f(1)$ και $f'(x)=(x^3-x)f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

Πρώτος τρόπος

$f'(x)=(x^3-x)f(x)\Rightarrow 2f(x)f'(x)=(x^3-x)f^2(x)$, $x^3-x\geq 0$

για κάθε $x\in[-1,0]$, άρα $f^2\nearrow$ στο $[-1,0]$, οπότε $f^2(x)=f^2(0)$

- αν $f(0)=0\Rightarrow f(x)=0$, για κάθε $x\in[-1,0]$
- αν $f(0)\neq 0\Rightarrow f(x)=f(0)$, για κάθε $x\in[-1,0]$, οπότε

$f'(x)=(x^3-x)f(0)$, για κάθε $x\in[-1,0]$, επομένως

$f(x)=(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2})f(0)+C$, $f(-1)=f(0)\Rightarrow C=0$

$\Rightarrow f(x)=(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2})f(0)\overset{x=0}{\Rightarrow} f(0)=0\Rightarrow f(x)=0$

$f^2\searrow$ στο $[0,1]$ οπότε καταλήγουμε $f(x)=0$ στο $[0,1]$

f συνεχής στο 0, οπότε $f(x)=0$, για κάθε $x\in[-1,1]$

ή

Δεύτερος τρόπος

$f'(x)=(x^3-x)f(x)\Rightarrow f'(x)-(x^3-x)f(x)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)+(-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2})'f(x)=0$

$e^{-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}}f'(x)+e^{-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}}(-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2})'f(x)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}}f(x)=C$

Οπότε για $x=-1$ και $x=0$ προκύπτει $C=0\Rightarrow f(x)=0$