Θέμα 42

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi:\mathbb{R} \quad \mathbb{R} \quad \mathbb{R}$, με $\varphi(x)=e^{x}+x-1$ και η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^{5}(x)+f^{3}(x)+f(x)=\varphi(x)$, τότε να αποδείξετε $f(\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$

Θέμα 43

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$

(ε1) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x=\kappa$ είναι άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f αν και μόνο αν $f(x)=f(2\kappa-x)$

(ε2) Η ευθεία $x=\kappa$ είναι άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\kappa,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\kappa]$

(ε3) Αν η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική δευτέρου βαθμού και έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=2$, $f(0)=2f(1)$ και $f(x)\geq f(x_0)=2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

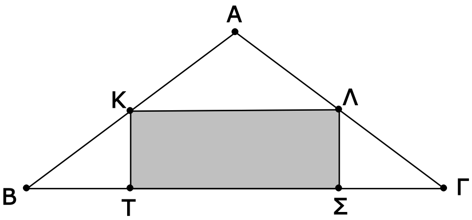
Θέμα 44

(ε1) Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,2\kappa)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=(2\kappa+x)\sqrt{4\kappa^{2}-x^{2}}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι $\nearrow$ στο $(0,\kappa]$ και f είναι $\searrow$ στο $[\kappa,2\kappa)$

(ε2) Σε ημικύκλιο διαμέτρου 2 να εγγράψετε τραπέζιο με το μέγιστο εμβαδόν

Θέμα 45

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές $AB=A\Gamma=5$ και $B\Gamma=8$



(ε1) Να αποδείξετε ότι η γωνία A είναι αμβλεία

(ε2) Να βρείτε πότε το εμβαδόν του ορθογωνίου $K\Lambda\Sigma T$ γίνεται μέγιστο

Θέμα 46

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi, f:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$, με $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

Οι γραφικές παραστάσεις των φ, f είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $x=\kappa$

(ε1) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις f, φ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

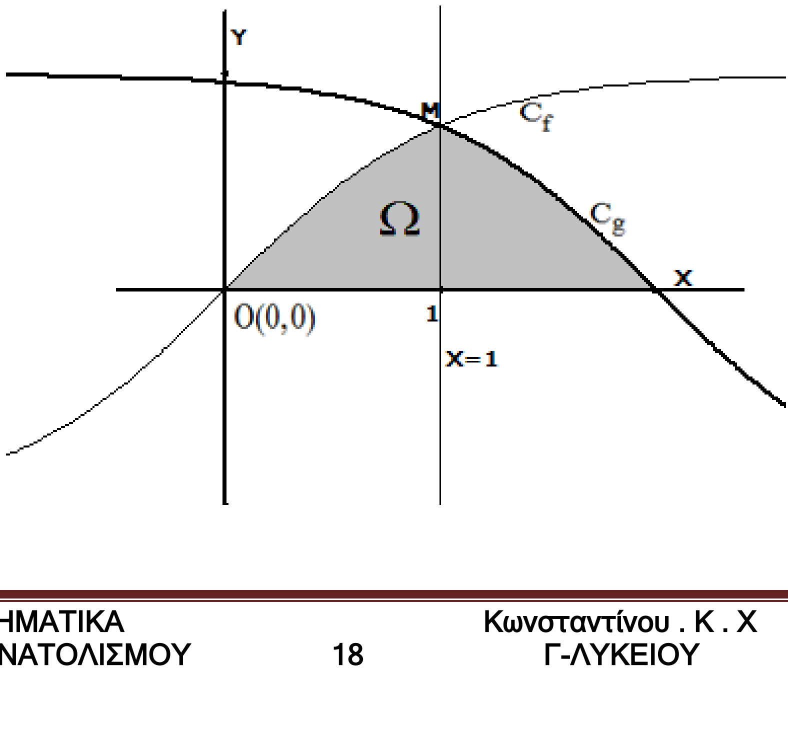
(ε2) f περιττή και $|\varphi(x)|<1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(ε3) $f(\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$

(ε4) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g, f είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $x=1$,όπου $g(x)=\dfrac{e^4-e^{2x}}{e^{2x}+e^4}$

(ε5) Οι C_f, C_g έχουν μόνο ένα κοινό σημείο M του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες

(ε6) Αν οι C_f, C_g δεν διακόπτονται και $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω του σχήματος , τότε $E(\Omega)<\dfrac{2(e^2-1)}{e^2+1}$



Θέμα 47

Έστω συνάρτηση f ,με $\mathrm{f}(x)=\dfrac{\alpha x-\sqrt{x^2-\alpha^2}}{\alpha x+\sqrt{x^2-\alpha^2}}$, $\alpha>1$

(ε1) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
Αν $\mathrm{f}(2)=1$, τότε

(ε2) Να βρείτε το α

(ε3) Να αποδείξετε ότι $1\le \mathrm{f}(x)<3$, για κάθε $x\in(-\infty,-2]$

(ε4) Να αποδείξετε ότι $1/3<\mathrm{f}(x)\le 1$, για κάθε $x\in[2,+\infty)$

(ε5) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathrm{A}=(-\infty,-2)\cup$
και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι $\mathrm{C_f},\mathrm{C_{f^{-1}}}$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο

Θέμα 48 (Σ.Β σλ 28- 9)

Έστω f , g , με $\mathrm{f}(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\mathrm{g}(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(ε1) Να εξετάσετε ποια από τις f , g αντιστρέφεται

(ε2) Να μελετήσετε κάθε μια από τις f , g ως προς τη μονοτονία

(ε3) Να βρείτε τις τιμές $\mathrm{f}\left(\left(\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2}\right)^2\right)$, $\alpha\ge 2$

και $\mathrm{g}\left(\left(\dfrac{\beta+\sqrt{\beta^2+4}}{2}\right)^2\right)$

(ε4) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{f}(\mathrm{A_f})=[2,+\infty)$ και $\mathrm{g}(\mathrm{A_g})=\mathbb{R}$

(ε5) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathrm{f}(x)=\mathrm{g}^{-1}(x)$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0,1)$

Θέμα 49

Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathrm{f},g:\mathbb{R}\quad\mathbb{R}$, για τις οποίες
Ισχύει ότι : $\mathrm{f}^3(x)+g(\mathrm{y})=x^3+3x^2+3x+\mathrm{y}+2$, για κάθε $x,\mathrm{y}\in\mathbb{R}$.Αν οι $\mathrm{C_f},\mathrm{C}_g$, έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο , τότε να αποδείξετε ότι $\mathrm{f}=g$

Θέμα 50

Α Δίνεται η συνάρτηση f ,με $\mathrm{f}(x)=2x-1$, να αποδείξετε ότι : $\mathrm{f}(x+\mathrm{y})=\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(\mathrm{y})+1$, για κάθε $x,\mathrm{y}\in\mathbb{R}$

Β Δίνεται η συνάρτηση f ,με $\mathrm{f}(\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$, $\mathrm{f}(2)=3$

- $\mathrm{f}(x+\mathrm{y})=\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(\mathrm{y})+1$, για κάθε $x,\mathrm{y}\in\mathbb{R}$ (1)
- Η εξίσωση $\mathrm{f}(x)=-1$ έχει μοναδική ρίζα

(ε 1) Να υπολογίσετε τις τιμές $\mathrm{f}(0),\mathrm{f}(1)$

Να αποδείξετε ότι

(ε 2) $\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(-x)=-2$ (ε 3) Η συνάρτηση f αντιστρέφεται

(ε 4) $2\mathrm{f}^{-1}(x+\mathrm{y})=2\mathrm{f}^{-1}(x)+2\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y})-1$

Αν $\mathrm{f}^{-1}(x)>0$, για κάθε $x\in(-1,+\infty)$, τότε

(ε 5) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Θέμα 51

Δίνονται οι μη σταθερές συναρτήσεις $\mathrm{f},\mathrm{g}:\mathbb{R} \quad \infty)$
για τις οποίες ισχύει $\mathrm{f}(x+\mathrm{y})+\mathrm{g}(x-\mathrm{y})=2\mathrm{f}(x)+2\mathrm{g}(\mathrm{y})$ (1)
για κάθε $x,\mathrm{y}\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

(ε 1) Οι $C_{\mathrm{f}},C_{\mathrm{g}}$ διέρχονται από την αρχή των αξόνων

(ε 2) Η συνάρτηση g έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $\mathrm{y}'\mathrm{y}$

(ε 3) $\mathrm{f}=\mathrm{g}$ (ε 4) $\mathrm{f}(2x)=4\mathrm{f}(x)$

(ε 5) Αν η f είναι πολυωνυμική , τότε να βρείτε τον τύπο της

Θέμα 52

Έστω οι συναρτήσεις $\mathrm{f}(x)=x^2$ και $\mathrm{g}(x)=-x^2+4x-2$
M κοινό σημείο των $C_{\mathrm{f}},C_{\mathrm{g}}$ και (ε) τυχαί ευθεία η οποία διέρχεται από το M και τέμνει τη C_{f} στο $\mathrm{B}(\kappa,\mathrm{f}(\kappa))$, $\kappa\neq1$ και την C_{g} στο σημείο Γ , $x_{\Gamma}\neq1$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι το M είναι μοναδικό

(ε 2) Να αποδείξετε $\mathrm{BM}=\Gamma\mathrm{M}$

(ε 3) Αν $\kappa=2$ και $\Sigma(\rho,\mathrm{g}(\rho))$, $\rho\in\mathbb{R}$,αν $\mathrm{E}(\rho)$ το εμβαδόν του $\Sigma\mathrm{B}\Gamma$,τότε να μελετήσετε την συνάρτηση E ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

Θέμα 53

Έστω οι συναρτήσεις f,g, με $\mathrm{f}(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-1}$ και $\mathrm{g}(x)=\sqrt[3]{2-x}-\sqrt[3]{1-x}$.

(ε 1) Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν μόνο ένα κοινό σημείο

(ε 2) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις f,g

(ε 3) Να αποδείξετε $\mathrm{f}(A_f)=\mathrm{g}(A_g)=(0,1]$

(ε 4) Αν η ευθεία $\mathrm{y}=\kappa$ τέμνει τις C_f στα $B(2,\mathrm{f}(2))$ την C_g στο Γ και M σημείο του άξονα $x'x$, τότε να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν E του τριγώνου $MB\Gamma$ ισχύει ότι $\kappa=E$

Θέμα 54

Δίνεται η συνάρτηση f ,με $\mathrm{f}(\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$, $\mathrm{f}(-1)\neq 0$ **(1)**.
Η εξίσωση $\mathrm{f}(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα και για κάθε $x,\mathrm{y}\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι : $\mathrm{f}(x\mathrm{y})=\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(\mathrm{y})+\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(\mathrm{y})$ **(2)**

(ε 1) Να βρείτε τις τιμές $\mathrm{f}(-1),\mathrm{f}(0),\mathrm{f}(1)$

(ε 2) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(1/x)+\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(1/x)=0,\ x\neq 0$

(ε 3) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

(ε 4) Αν $\mathrm{f} \nearrow$ στο $[0,+\infty)$, τότε $\mathrm{f} \nearrow$ στο $\mathbb{R}$

Θέμα 55

Α Να βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και το ευρύτερο υποσύνολο D του $\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση g, με $\mathrm{g}(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ να είναι συνάρτηση $''1-1''$ στο D

Αν $\alpha\neq 0$ να αποδείξετε ότι η g δεν είναι $''1-1''$ στο $\mathbb{R}$

Β Δίνεται η συνάρτηση f με $\mathrm{f}(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\geq 0$

και $\alpha\in\mathbb{Z}$, $\mathrm{f} \nearrow$ στο $[2,+\infty)$, με $\mathrm{f}(2)=-1$ και $\mathrm{f}(0)=3$

Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

Θέμα 56

Δίνονται οι θετικοί αριθμοί α, β και η συνάρτηση f, με τύπο $f(x) = \ln(\beta - \alpha e^{x})$ και $f(A_f) = (-\infty, \ln\beta)$.

(ε 1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A_f της συνάρτησης f

(ε 2) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

(ε 3) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης της f

(ε 4) Αν οι C_f, C_{f-1} έχουν ένα κοινό σημείο ,τότε να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ έχει άπειρες λύσεις σ το σύνολο $\Delta = A_f \bigcap \quad _{-1}$

(ε 5) Αν οι C_f, C_{f-1} έχουν ένα κοινό σημείο και το σημείο με τετμημένη $-\ln 2$ ανήκει στη C_f, ενώ το σημείο με τεταγμένη $\ln(1/2)$ ανήκει στη C_{f-1}, τότε να βρείτε το β

Θέμα 57

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = e^{\beta - \alpha \ln x}$, $\alpha > 0$ και $\beta \geq 0$

(ε 1) Να βρείτε την τιμή της f στο $\xi = \sqrt[\alpha]{\dfrac{e^{\beta}}{\kappa}}$, $\kappa > 0$

(ε 2) Να αποδείξετε ότι $f(A_f) = (0, +\infty)$

(ε 3) Να μελετήσετε την f, ως προς τη μονοτονία

(ε 4) Να αποδείξετε ότι η f ,αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f^{-1}

(ε 5) Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε οι συναρτήσεις f και f^{-1} να είναι ίσες

(ε 6) Αν $\alpha = 1$, $\beta \geq 0$ και ηευθεία $(\varepsilon): y = -x + 2$ έχει με τη C_f μόνο ένα κοινό σημείο ,τότε να αποδείξετε $\beta = 0$

(ε 7) Αν $\alpha = 1$, $\beta = 0$ και η ευθεία $(\eta): y = \kappa x + \rho$, $\rho > 0$ έχει με τη C_f μόνο ένα κοινό σημείο και τέμνει τους άξονες στα B, Γ, τότε να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $O B \Gamma$, $O(0,0)$ η αρχή των αξόνων

Θέμα 58

Έστω συνάρτηση $\mathrm{f}:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$.ισχύει ότι:

$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))+x=\mathrm{f}(x)$ **(1)**

Α Να αποδείξετε ότι

(α1) Η συνάρτηση f είναι $''1-1''$ στο $\mathbb{R}$

(α2) $\mathrm{f}(0)\leq 0$

(α 3) Η συνάρτηση f είναι περιττή

(α4) $\mathrm{f}(\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$

Β Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, τότε

(β1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

(β2) Να βρείτε τη θέση της γραφικής παράστασης $\mathrm{C_f}$ της συνάρτησης f ως προς τον άξονα $x'x$ και ως προς την ευθεία $\mathrm{y}=x$

Θέμα 59

Να βρείτε τις συναρτήσεις $\mathrm{f}:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύει

$\mathrm{f}((x-\mathrm{y})^2)=\mathrm{f}^2(x)-\mathrm{C}x\mathrm{f}(\mathrm{y})+\mathrm{y}^2$, για κάθε $x,\mathrm{y}\in\mathbb{R}$ **(1)**

$0<\mathrm{C}\leq 2$

Θέμα 60

Οι συναρτήσεις f,g είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$ και οι $\mathrm{C_f},\mathrm{C}_g$ δεν έχουν κοινά σημεία , επιπλέον για κάθε $x,\mathrm{y}\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$\mathrm{f}(x)g(\mathrm{y})+\mathrm{f}(\mathrm{y})g(x)=2x\mathrm{y}-3x-3\mathrm{y}+4$ **(1)**

Να αποδείξετε ότι

(ε1) Αν $g(1)<0$, τότε $\mathrm{f}(2)>0$, ενώ αν $\mathrm{f}(1)<0$, τότε $g(2)>0$

(ε2) Η συνάρτηση $\mathrm{f}-g$ είναι σταθερή

Θέμα 61

Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathrm{f},g:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$, οι $\mathrm{C_f},\mathrm{C}_g$ έχουν δύο τουλάχιστον κοινά σημεία , επιπλέον για κάθε $x,\mathrm{y}\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$\mathrm{f}(x)g(\mathrm{y})+\mathrm{f}(\mathrm{y})g(x)=2x\mathrm{y}$ **(1)** .Να βρείτε τους τύπους των f,g

Θέμα 62

Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathrm{f}, g : \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \quad \mathbb{R}$

για τις οποίες ισχύει ότι :

$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) + \mathrm{f}(x) = \mathrm{C}$ **(1)** , για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$g(g(x)) + g(x) = \kappa x + \mathrm{C}$ **(2)**, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αν $\mathrm{f} \neq g$ τότε να βρείτε το εμβαδόν $\mathrm{E}(\Omega)$ του χωρίου Ω

που περικλείεται από τις $\mathrm{C_f}, \mathrm{C}_g$ και την ευθεία $x = 1$

Θέμα 63

Α . Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{g} : \Delta = (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με $\mathrm{g}(x) = \frac{1}{x} - 1$

Να αποδείξετε ότι

(α 1) $\mathrm{g}(\Delta) = (-1, +\infty)$

(α 2) $\mathrm{g}(x\mathrm{y}) = \mathrm{g}(x)\mathrm{g}(\mathrm{y}) + \mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(\mathrm{y})$, για κάθε $x, \mathrm{y} \in \Delta$

Β Δίνεται $\mathrm{f} : \Delta = (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν

- Υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\alpha, \beta \in \Delta$, με $\mathrm{f}(\alpha) \neq \mathrm{f}(\beta)$
- $\mathrm{f}(x\mathrm{y}) = \mathrm{f}(x)\mathrm{f}(\mathrm{y}) + \mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(\mathrm{y})$, για κάθε $x, \mathrm{y} \in \Delta$ **(1)**

(ε 1) Να υπολογίσετε την τιμή της f στο $x_0 = 1$

(ε 2) Να αποδείξετε ότι η f είναι $''1-1''$

Αν επιπλέον ισχύει **:** $\mathrm{f}(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$ και $\lim\limits_{x \to 1} \mathrm{f}(x) = 0$

τότε να αποδείξετε ότι

(ε 3) $\mathrm{f} \searrow$ στο Δ

(ε 4) f συνεχής στο Δ

(ε 5) $\mathrm{f}(\Delta) = (-1, +\infty)$

Θέμα 64

Η συνάρτηση $\mathrm{f} : \mathbb{R} \quad \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\alpha = 0$ και για κάθε

$x, \mathrm{y} \in \mathbb{R}$ ισχύει $\mathrm{f}^2(x\mathrm{y}) = \mathrm{f}(x)\mathrm{f}(\mathrm{y})$.**(1)**

Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

Θέμα 65

Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathrm{f}, g:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$, $\mathrm{f} \nearrow$ στο $\mathbb{R}$ και

$g \searrow$ στο $\mathbb{R}$, οι C_{f}, C_g τέμνονται στο σημείο $\mathrm{M}(\rho,\kappa)$ και

$\mathrm{f}(x)g(\mathrm{y}) = 2x - x\mathrm{y} - 2\mathrm{y} + 4$ **(1)**, για κάθε $x,\mathrm{y}\in\mathbb{R}$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{f}(-2)+g(2)=0$

(ε 2) Να αποδείξετε ότι $\kappa > 0$

Αν επιπλέον το εμβαδόν του χωρίου Ω που σχηματίζουν οι C_{f}, C_g με τον άξονα $x'x$ είναι $4\,\tau.\mu$, τότε

(ε 3) Να βρείτε τους τύπους των f, g

Θέμα 66

Έστω η συνάρτηση f , με $\mathrm{f}(x) = x^4 - x^3 + x^2 - (x^2+x)\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}$

(ε 1) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{f}(x)$

(ε 2) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_{f} , με τον άξονα $x'x$

(ε 3) Να βρείτε το πρόσημο της f για τις διάφορες τιμές του $x\in A_{\mathrm{f}}$

Και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

(ε 4) Υπάρχουν δύο τουλάχιστον ευθείες $(\varepsilon),(\eta)$ που εφάπτονται στις C_{f} , $C_{\mathrm{f}'}$ αντίστοιχα και είναι μεταξύ τους παράλληλες

(ε 5) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(1,+\infty)$, ώστε $\mathrm{f}'(\rho)\geq 0$

(ε 6) Η f έχει ένα τουλάχιστον τοπικό μέγιστο

(ε 7) Η f είναι $\nearrow$ στο $[1,+\infty)$

Θέμα 67

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $\Delta=[0,1]$ με συνεχή παράγωγο στο $(0,1)$, $\varphi(0)=1$ και $\varphi^{/}(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(0,1)$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Delta=[0,1]$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ σε δύο σημεία και επιπλέον ισχύει ότι

$\mathrm{f}^3(1-x)=[\varphi(x-x^2)-1]\mathrm{f}(x)$, για κάθε $x\in[0,1]$ **(1)**

(ε1) Να λυθεί στο $\Delta=[0,1]$ η εξίσωση $\mathrm{f}(x)=0$

(ε2) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

(ε3) Να αποδείξετε ότι η f για $x=1/2$ έχει ακρότατο

(ε4) Να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία

Θέμα 68 **1 - 9 - 2019**

Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(1,3),\mathrm{B}(4,7),\Gamma(3,4)$. Να αποδείξετε ότι

(ε 1) Υπάρχει ευθεία (ε) η οποία εφάπτεται στη $\mathrm{C_f}$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $\mathrm{O\Gamma}$, $\mathrm{O}(0,0)$

(ε 2) Αν οι $\mathrm{A\Gamma},\mathrm{OB}$ τέμνονται σε σημείο M της $\mathrm{C_f}$, τότε η εφαπτομένη (η) στη $\mathrm{C_{f^{/}}}$ στο M είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

Θέμα 69 **12 - 9 - 2019**

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $\mathrm{f}:\mathbb{R}\quad\mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{f}(x)-1}{x}=\rho\in\mathbb{R}$, $\mathrm{f}(2)=\mathrm{f}^2(1)$ **(1)**

$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, με $\alpha\gamma\neq 0$ και για κάθε $x,\mathrm{y}\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$\mathrm{f}(x+\mathrm{y})=\mathrm{f}(\alpha x)\mathrm{f}(\gamma \mathrm{y})+\beta x\mathrm{y}$ **(2) , τότε**

(ε 1) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε), η οποία εφάπτεται στη $\mathrm{C_f}$, στο $x_0=1$

(ε 2) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

(ε 3) Να αποδείξετε ότι $x-1<\mathrm{f}(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Θέμα 70 12 - 9 - 2019

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $\mathrm{f}(x)=\sqrt[3]{x}-2$ και

$g(x)=5-\sqrt{x^2-5x+1}$

(ε1) Να βρείτε τα $\mathrm{A_f}$, A_g

(ε2) Να βρείτε τα $\mathrm{f}(\mathrm{A_f})$, $g(\mathrm{A}_g)$

(ε3) Να αποδείξετε ότι οι $\mathrm{C_f}, \mathrm{C}_g$ έχουν μόνο ένα κοινό σημείο

(ε4) Να εξετάσετε αν υπάρχουν $\alpha \in \mathrm{A_f}$ και $\beta \in \mathrm{A}_g$, με $\alpha \neq \beta$ ώστε $\mathrm{f}(\alpha)=g(\beta)$ και $\beta, \mathrm{f}(\alpha), g(\beta) \in \mathbb{Z}$

Θέμα 71

Έστω οι συναρτήσεις $\mathrm{f}, g : \Delta=(0,+\infty) \to \mathbb{R}$,για τις οποίες ισχύουν

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο Δ
- Το σημείο M έχει θετικές ακέραιες συντεταγμένες και είναι κοινό σημείο των $\mathrm{C_f}, \mathrm{C}_g$
- $\dfrac{1}{\mathrm{f}^2(x)}+g(\mathrm{y})=x^2+\mathrm{y}+\mathrm{C}$ **(1)** ,για κάθε $x, \mathrm{y} \in \Delta$ και $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο Δ

(ε 2) Να μελετήσετε τις f, g ως προς τη μονοτονία

(ε 3) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια των f, g στο $+\infty$

Αν επιπλέον $g(1)\mathrm{f}^2(1)+1=2\mathrm{f}^2(1)$, τότε

(ε 4) Να βρείτε τους τύπους των f, g και στη συνέχεια

(ε 5) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις $\mathrm{C_f}, \mathrm{C}_g$ και την ευθεία $x=2$

Θέμα 72 **2020 - 4 - 6**

Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $\mathrm{f}(0)=\alpha$
- $\mathrm{f}^{//}(x)+\mathrm{f}^{/}(x)+\mathrm{f}(x)=\alpha$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $\mathrm{f}(x)\geq\alpha$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(ε 1) Να βρείτε την τιμή της $\mathrm{f}^{//}$ στο $x_0=0$

(ε 2) Να βρείτε τον τύπο της f

Θέμα 73 **2020 - 4 - 7**

Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}^{/}(2-x)=1$ **(1)** ,για κάθε $x\in\mathbb{R}$

A, B τα σύνολα τιμών $\mathrm{A}\bigcap\mathrm{B}\neq\varnothing$

των $\mathrm{f},\mathrm{f}^{/}$ αντίστοιχα με

(ε 1) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

(ε 2) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον κ,ρ ώστε $\mathrm{f}(\kappa)=1=\mathrm{f}^{/}(\rho)$

(ε 3) Αν $\mathrm{f}(0)=\mathrm{e}^{-1}$ και $\mathrm{f}(1)=1$, τότε να βρείτε τον τύπο της f

Θέμα 74 . **2020 - 4 - 10**

A Δίνεται η συνάρτηση g, με $g(x)=\sqrt{x\ln x}$

(ε 1) Έστω B, Γ τα σύνολα τιμών των g, $g^{/}$, τότε $\Gamma\subseteq\mathrm{B}$

(ε 2) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=g^{/}(x)$ έχει ακριβώς μια ρίζα

(ε 3) Να αποδείξετε ότι $2xg^{//}(x)g(x)+2x(g^{/}(x))^2=1$ $x\in(1,+\infty)$

B Έστω συνάρτηση f ,με πεδίο ορισμού $\Delta=[1,+\infty)$, f συνεχής στο Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ $\mathrm{f}(1)=0$, $\sqrt{\mathrm{e}}\mathrm{f}^{/}(\mathrm{e})=1$,να βρείτε τον τύπο της f αν για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει $2x\mathrm{f}^{//}(x)\mathrm{f}(x)+2x(\mathrm{f}^{/}(x))^2=1$

Θέμα 75 . 2020 - 4 - 11

Α Δίνεται η συνάρτηση g, με $g(x)=\sqrt{x}\ln x$ $(\mathrm{e}\cong 2,7)$

(ε 1) Να μελετήσετε την g, ως προς τη μονοτονία

(ε 2) Να υπολογίσετε το σύνολο τμών της $g^{/}$

(ε 3) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

(ε 4) Να αποδείξετε ότι $g(x)g^{/}(x)+2xg(x)g^{//}(x)=\ln x$, $x\neq 1$

Β Δίνεται $\mathrm{f}:\Delta=(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη $\mathrm{f}(1)=0$, $\mathrm{f}^{/}(1)-1=0=\mathrm{f}(1)$ και για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει ότι $\mathrm{f}^{/}(x)+2x\mathrm{f}^{//}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, τότε να βρείτε τον τύπο της f

Θέμα 76 . 2020 - 4 - 12

Δίνονται ο αρνητικός αριθμός C και η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Delta=(0,+\infty)$, $\mathrm{f}(1)=1$ και για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $\mathrm{f}^{//}(x)\neq 0$ και $\mathrm{f}^{/}(x)\mathrm{f}(x^{-2})=\mathrm{C}$, αν κάθε εφαπτομένη στη $\mathrm{C_f}$ σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν $2\,\tau\mu$ τότε να βρείτε τον τύπο της f

Θέμα 77 . 2020 - 4 - 13

Δίνεται η συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παραγωγίσιμη στο $\Delta=[1,+\infty)$, $\mathrm{f}(1)=\mathrm{f}(\mathrm{e})-\mathrm{e}=\mathrm{f}^{/}(\mathrm{e})-2=0$, E το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε) στη $\mathrm{C_f}$ σε κάθε σημείο $\mathrm{M}(\alpha,\mathrm{f}(\alpha))$ της $\mathrm{C_f}$ με τους άξονες $x'x,\mathrm{y'y}$ και για κάθε $x\in(1,+\infty)$ ισχύει $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}^{/}(x)\mathrm{f}^{//}(x)\neq 0$ **(1)**, τότε

(ε 1) Να βρείτε το πρόσημο της f

(ε 2) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

(ε 3) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Αν επιπλέον ισχύει ότι $2\mathrm{f}^{/}(\alpha)\mathrm{E}=\alpha^{2}$, τότε

(ε 4) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

(ε 5) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης κάθε σημείου N της $\mathrm{C_{f^{//}}}$ μειώνεται

Θέμα 78 . **2020 - 4 - 14**

Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\mathrm{f}'(x)\mathrm{f}^2(x)+\mathrm{f}'(x)=\mathrm{f}^2(x)+2$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι $1<\mathrm{f}'(x)\leq 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η f είναι "$1-1$"

(ε 2) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho\in\mathbb{R}$, ώστε $\mathrm{f}'(\rho)=2$

(ε 3) Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον τύπο της f'' συναρτήσει του $\mathrm{f}(x)$

(ε 4) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\mathrm{f}'(x)=\alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$

Θέμα 79 . **2020 - 4 - 15**

Δίνεται η συνάρτηση f, με $\mathrm{f}(x)=\dfrac{(x-1)\sqrt{x}}{\ln x}$

(ε 1) Να βρείτε το πεδίο ορισμου της A και το $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{f}(x)$

(ε 2) Να μελετήσετε την f, ως προς τη μονοτονία

(ε 3) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

(ε 4) Έστω g, με $g(x)=\begin{cases}\dfrac{(\mathrm{f}(x)-\sqrt{x})\ln x}{\sqrt{x}} & ,x\in\mathrm{A}\\ 0 & ,x=1\end{cases}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη C_g στο $x_0=1$

Θέμα 80 . **2020 - 4 - 16**

Δίνεται f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$2\mathrm{f}(x)+\eta\mu\mathrm{f}(x)=x$ **(1)** .Να αποδείξετε ότι

(ε1) Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ **(ε2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{f}(x)}{x}=\dfrac{1}{2}$

(ε3) Η f είναι περιττή

(ε4) Η f είναι συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

(ε5) Υπάρχουν $\rho,\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε $2\mathrm{f}(\rho)+2\mathrm{f}(\kappa)=\rho+\kappa-1$

(ε6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu 3x}{\mathrm{f}(x)}=0$

ΘΕΜΑ 81

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\quad\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι

$f(f(y))+f(x)=4y+2x$ (1), για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι

(α) Η συνάρτηση f είναι $''1-1''$

(β) $f(1)=2$

(γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

(δ) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f, είναι $f(\mathbb{R}\quad\mathbb{R}$

(ε) Η συνάρτηση f είναι περιττή

ΘΕΜΑ 82

Οι γραφικές παραστάσεις C_f,C_g των συναρτήσεων $f,g:\mathbb{R}\quad\mathbb{R}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $(\varepsilon): y=\alpha$, $\alpha>0$, ακόμα δίνεται ότι: Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι

(α) Η συνάρτηση g είναι $''1-1''$

(β) Οι γραφικές παραστάσεις C_f,C_g των συναρτήσεων f,g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο

(γ) Το σύνολο τιμών $g(\mathbb{R}$ της συνάρτησης g είναι το $\mathbb{R}$

ΘΕΜΑ 83

Οι γραφικές παραστάσεις C_f,C_g των συναρτήσεων $f,g:\mathbb{R}\quad\mathbb{R}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $(\varepsilon): x=\alpha$, $\alpha>0$,ακόμα δίνεταιότι: Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι

(α) Η συνάρτηση g είναι $''1-1''$

(β) Οι γραφικές παραστάσεις C_f,C_g και η ευθεία $(\delta): y=x$ έχουν μόνο ένα κοινό σημείο M

(γ) Το σύνολο τιμών $g(\mathbb{R}$ της συνάρτησης g είναι $g(\mathbb{R}\quad\mathbb{R}$

ΘΕΜΑ 84

Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $(\varepsilon): y=\alpha$, $\alpha>0$, η ευθεία $(\varepsilon_f): x=\alpha$ είναι άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f και η ευθεία $(\varepsilon_g): x=2\alpha$ είναι άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g, επιπλέον δίνονται τα σημεία $A(\beta,3)$ και $B(1,\gamma)$ της C_f, της f με $AB//x'x$ και $(AB)=7$. Να αποδείξετε ότι

(α) Οι συναρτήσεις f,g δεν είναι $''1-1''$

(β) $g(0)-f(0)=g(2\alpha)-f(-2\alpha)$

(γ) $2\alpha+\beta+\gamma=20$

(δ) Τα σημεία $\Gamma(8,6)$ και $\Delta(1,6)$ ανήκουν στη C_g της g

(ε) Η χορδή EZ ,της C_g της g είναι παράλληλη στον $x'x$ και $(AB)=(EZ)$, όπου οι τετμημένες των σημείων E,Z είναι $x_E=10$ και $x_Z=17$

85 . **2020 - 4 - 17**

Δίνεται f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $2f(x)+\sigma\upsilon\nu f(x)=x$ **(1)** .και τα σημεία $A(\alpha,\alpha-1)$ και $B(\beta,\beta+1)$, $\alpha-2<\beta<\alpha$.

(ε1) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

(ε2) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε

(ε3) Να αποδείξετε ότι η C_f και η ευθεία AB έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο

(ε4) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho\in\mathbb{R}$ ώστε $2f'(\rho)=1$

86 ΘΕΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις $f:[1,+\infty)\to(-\infty,1]$, $g:\Delta=[1,+\infty)\to\mathbb{R}$

για τις οποίες ισχύει ότι : $f(f(x))g^3(x)+f(x)g(x)+f(x)=\frac{x+2}{x}$,

για κάθε $x\in[1,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι

(α) Η συνάρτηση f είναι σταθερή

(β) Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα

(γ) Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f,g Έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

(δ) Η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g, είναι κάτω από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , για κάθε $x\in(1,+\infty)$

(ε) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι $g(\Delta)=(0,1]$

87 ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\quad\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν $f(4)=8$

και $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ **(1)**, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

Α Να αποδείξετε ότι

(α1) $f(0)=0$

(α2) Η συνάρτηση f δεν είναι $''1-1''$

(α3) $f(1)=-1$

Β Αν επιπλέον η ευθεία $x=1$ είναι άξονας συμμετρίας της C_f της συνάρτησης f , τότε να αποδείξετε ότι

(β1) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

(β2) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(\mathbb{R}\qquad -\infty)$

88 ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\Delta=[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και η ευθεία $(\varepsilon): y=x$ δεν έχουν κοινά σημεία και

$f(xy)+yf(x)+xf(y)=f(x)f(y)+2xy$ **(1)** για κάθε $x,y\in\Delta$

Α Να αποδείξετε ότι

(α1) $f(1)=2$

(α2) Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία $(\varepsilon): y=x$, για κάθε $x\in[1,+\infty)$

Β Αν επιπλέον ισχύουν

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο
- $2f(4)=3f(2)+1$
- $f(\alpha)+f(\beta)=4$, $\alpha,\beta\in[1,+\infty)$, τότε να βρείτε

(β1) Τη μονοτονία της συνάρτησης

(β2) Τα $\alpha,\beta\in[1,+\infty)$

89 ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(-1)=0$
- $f(x)>0$, για κάθε $x\in(1,+\infty)$
- $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)$ **(1)** ,για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι $"1-1"$ στο $\mathbb{R}$

(β) Να βρείτε το $f(2)$

(γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$

(δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $(-1,1)$

(ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f , δεν έχει ούτε μέγιστη τιμή ούτε ελάχιστη τιμή

90 ΘΕΜΑ

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$.ισχύει ότι:

$f(f(x))+x=f(x)$ **(1)**

Α Να αποδείξετε ότι

(α1) Η συνάρτηση f είναι $''1-1''$ στο $\mathbb{R}$

(α2) $f(0)\leq 0$

(α 3) Η συνάρτηση f είναι περιττή

(α4) Το σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}$ της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$

Β Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, τότε

(β1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

(β2) Να βρείτε τη θέση της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f ως προς τον $x'x$ και την ευθεία $y=x$

91 ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν

- $f(x+y)=f(x)+f(y)$ **(1)** , για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$
- Η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$
- $f(x)>0$ **(2)**, για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι

(α) $f(0)=0$ και ότι η συνάρτηση f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$

(β) Η συνάρτηση f είναι $''1-1''$ στο $\mathbb{R}$

(γ) $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$, για κάθε $x,y\in f(\mathbb{R}$

(δ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

(ε) Δεν υπάρχει ευθεία $(\varepsilon)//y'y$, η οποία να είναι άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

92 ΘΕΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση

f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$(\mathrm{f}\circ \qquad (x)=1-x$ **(1)**

(α) Να υπολογίσετε την τιμή της συνάρτησης g ,όταν $x=1$

(β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\mathrm{f}\circ$ ως προς τη μονοτονία

(γ) Να αποδείξετε ότι: Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

(δ) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{f}\,(1)\le(\mathrm{f}\circ \qquad +\mathrm{f}\,(0)$

για κάθε $x\in[0,1]$

(ε) Να βρείτε τη θέση της γραφικής παράστασης $\mathrm{C_g}$ της συνάρτησης g ως προς την ευθεία $\mathrm{y}=x$

93 ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

με $\alpha<\beta<\gamma$ **(1)** ,ώστε $6\mathrm{f}(x)\le\mathrm{f}(\alpha)+2\mathrm{f}(\beta)+3\mathrm{f}(\gamma)$ **(2)** , για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ακόμα δίνεται ότι η συνάρτηση f , έχει το πολύ τρείς θέσεις μεγίστου.

Α Να αποδείξετε ότι

(α1) Η συνάρτηση f , δεν είναι $''1-1''$

(α2) $\mathrm{f}(x)\le\mathrm{f}(\alpha)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Β Αν επιπλέον ισχύει ότι: $\mathrm{f}(1)+\mathrm{f}(2)+\mathrm{f}(3)=3\mathrm{f}(\beta)$

(β1) Να αποδείξετε ότι: $\alpha+\beta+\gamma=6$ και να λυθεί η ανίσωση

(β2) $(\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}\,(1))(\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}\,(2))(\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}\,(3))\le 0$

(β3) Αν $\mathrm{A}=\mathrm{f}\,(1)+\mathrm{f}\,(2)+\mathrm{f}\,(3)$, $\Gamma=\mathrm{f}\,(1)\mathrm{f}\,(2)\mathrm{f}\,(3)$

$\Gamma=\mathrm{f}\,(1)\mathrm{f}\,(2)+\mathrm{f}\,(2)\mathrm{f}\,(3)+\mathrm{f}\,(3)\mathrm{f}\,(1)$, να λυθεί η εξίσωση

$\mathrm{f}^3(x)-\mathrm{A}\mathrm{f}^2(x)+\Gamma\mathrm{f}(x)-\mathrm{B}=0$

94 ΘΕΜΑ

Δίνονται η ευθεία $(\varepsilon): x=2$ και οι συναρτήσεις $\mathrm{f},\mathrm{g}:\mathbb{R}\quad\mathbb{R}$, με γραφικές παραστάσεις C_f, C_g αντίστοιχα , γ ια τις οποίες ισχύουν:

- $\mathrm{f}(2)=2$ • f γνησίως μονότονη και περιττή στο $\mathbb{R}$
- Η ευθεία (ε) είναι άξονας συμμετρίας της C_g
- Η συνάρτηση g ,είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$
- $\mathrm{g}(x+\mathrm{y})=\mathrm{g}(x)+\mathrm{g}(\mathrm{y})+2\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(\mathrm{y})-4$ (1) , για κάθε $x,\mathrm{y}\in\mathbb{R}$

(α) Να βρείτε την τιμή της συνάρτησης f , όταν $x=0$ και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία

(β) Να βρείτε την τιμή της συνάρτησης g , όταν $x=4$ και όταν $x=2$

(γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$

(δ) Να αποδείξετε ότι : Τα σημεία A,B , με τετμημένες $x_A=1$ και $x_B=4$ είναι κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f, C_g των συναρτήσεων f,g αντίστοιχα

(ε) Να αποδείξετε ότι : Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f,g αντίστοιχα έχουν μόνο δύο κοινά σημεία

95 ΘΕΜΑ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με γραφικές παραστάσεις C_f, C_g αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύουν:

- f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και g γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$
- Η ευθεία $(\varepsilon): x=1$ είναι άξονας συμμετρίας της C_g
- Το σημείο $M(1,2)$ είναι κέντρο συμμετρίας της συνάρτησης f
- $g(x+y)=g(x)+g(y)+2f(x)f(y)-2f(x)-2f(y)+1$ **(1)** για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

(α) Να βρείτε τις τιμές των συναρτήσεων f,g, όταν $x=0$

(β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f

(γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

(δ) Να αποδείξετε ότι : $g(1)=f(-1)$

(ε) Να αποδείξετε ότι : Τα σημεία A,B , με τετμημένες $x_A=0$ και $x_B=3$ είναι κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f, C_g των συναρτήσεων f,g αντίστοιχα

96 ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν

- $f(x+y)=f(x)+f(y)-2$ **(1)**, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
- $2f(0)=4=f(2)$ **(2)**
- Η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ **(3)**
- $f(x)>0$ **(4)**, για κάθε $x \in (-2,+\infty)$.

Να αποδείξετε ότι

(α) $f(-2)<1$

(β) $f(x)+f(-x)=4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(γ) Η συνάρτηση f είναι "$1-1$" στο $\mathbb{R}$

(δ) $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)+2$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(x)>0$ **(4)**, για κάθε $x \in (-2,+\infty)$, τότε να αποδείξετε ότι

(ε) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

97 ΘΕΜΑ

Δίνεται η μη σταθερή συνάρτηση $f:\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν

- $f(xy)=f(x)f(y)$ **(1)**, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$
- Η εξίσωση $f(x)=1$, έχει μόνο μια ρίζα θετική **(2)**
- $f(x)<1$ **(3)**, για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

Να αποδείξετε ότι

(α) $f(1)=1$

(β) $f(x)>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$

(γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία

(δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $''1-1''$

(ε) $f^{-1}(xy)=f^{-1}(x)f^{-1}(y)$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

98 ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}$ $\infty)$, για την οποία ισχύουν

- Υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, με $f(\alpha)\neq f(\beta)$ **(1)**
- $f(x+y)=f(x)f(y)-f(x)-f(y)+2$ **(2)**, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$
- Η εξίσωση $f(x)=2$, έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ **(3)**

Α Να αποδείξετε ότι

(α1) $f(0)=2$

(α2) Η ευθεία $y=1$ δεν τέμνει τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f.

(α3) $f(x)f(-x)=f(x)+f(-x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(α4) Η συνάρτηση f είναι $''1-1''$

Β Αν επιπλέον ισχύει ότι : $f(x)>2$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Να αποδείξετε ότι: Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

99 ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν

- $f(x)f(y)=f(xy)+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ **(1)**, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$
- Η εξίσωση $f(x)=2$, έχει μόνο μια θετική ρίζα **(2)**

Να αποδείξετε ότι

(α) $f(1)=2$

(β) Να αποδείξετε ότι : $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

(γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στα διαστήματα $\Delta_1=(-\infty,-1]$, $\Delta_2=[-1,0)$, $\Delta_3=(0,1]$ $\Delta_4=[1,+\infty)$

(δ) Αν $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ και $f(\alpha)+f(\beta)=4$, να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=1$

(ε) Αν $y_0\geq 2$ και $2x_0-y_0=\sqrt{y_0^2-4}$, να αποδείξετε ότι : $f(x_0)=y_0$

Αν $y_0\leq -2$ και $2x_0+\sqrt{y_0^2-4}=y_0$, να αποδείξετε ότι : $f(x_0)=y_0$

100 ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν

- $f(x+y)=f(x)f(y)$ **(1)**, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$
- Η εξίσωση $f(x)=1$, έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ **(2)**

Να αποδείξετε ότι

(α) $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(β) $f(0)=1$

(γ) $f(x)f(-x)=1$

(δ) Η συνάρτηση f είναι $''1-1''$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f^{-1}(xy)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$

(ε) Αν $f(x)>1$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

101 ΘΕΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \Delta = (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν

- g συνεχής στο Δ
- $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$
- $g(1) = 2 = f(2)$
- Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, με $\alpha < \beta < \gamma$, ισχύει $(g(\alpha) - g(\beta))(g(\beta) - g(\gamma)) > 0$
- $f^3(x) + f(x) = g(x)$ **(1)**, για κάθε $x \in \Delta$

Να αποδείξετε ότι

(α) Η συνάρτηση g είναι γνησίως μονότονη στο Δ

(β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο Δ

(γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

(δ) $g(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$

(ε) Ισχύει η ισοδυναμία $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

102 ΘΕΜΑ

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R}$ ɔ), για την οποία ισχύουν

- $f(x + y) + f(x) + f(y) \leq f(x)f(y) + 2$ **(1)** για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
- $f(0) \leq 2$ και $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι

(α) $f(0) = 2$ **(β)** $f(x) \neq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(γ) $\lim\limits_{x \to 0} f(-x) = 2$

(δ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

(ε) Το σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}$ της f είναι $f(\mathbb{R}$ ɔ)

103 ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $\mathrm{f}:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\mathrm{f}(x)+1=(x^2-6x+5)\mathrm{f}^2(x)$ **(1)** , για κάθε $x\in\Delta=\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι

(α) Η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη στο Δ

(β) $\mathrm{f}(x)\le 0$, για κάθε $x\in\Delta$

(γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$

(δ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[5,+\infty)$

(ε) Το σύνολο τιμών $\mathrm{f}(\Delta)$ είναι $\mathrm{f}(\Delta)=[-1,0)$

104 ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$, $\mathrm{f}(-2)=\mathrm{f}'(2)=4$, $\mathrm{f}(0)=0=\mathrm{f}'(0)$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν $\mathrm{f}''(x)\ne 0$ και $\mathrm{f}(\mathrm{f}'(x))=2\mathrm{f}'(\mathrm{f}(x))$

(ε1) Να λυθεί η εξίσωση $\mathrm{f}'(x)=0$

(ε2) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

(ε3) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f' αντιστρέφεται

(ε4) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{\mathrm{f}(x)}$

105 ΘΕΜΑ

(α) Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση f , με ακέραιους συντελεστές βαθμού ν , $\mathrm{f}(0)=0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\mathrm{f}''(x)\ne 0$.

Να αποδείξετε ότι ν άρτιος

(β) Αν f άρτια, τότε η f για $x=0$ έχει μέγιστο ή ελάχιστο

(γ) Αν f άρτια και επιπλέον $\nu\le 5$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\mathrm{f}(\mathrm{f}'(x))=2\mathrm{f}'(\mathrm{f}(x))$,τότε να βρείτε τον τύπο της f

106 ΘΕΜΑ

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση f ν βαθμού , $\mathrm{f}(\kappa)=\mathrm{f}(\rho)=1$ **(1)**, $\kappa<\rho$

και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x\mathrm{f}(x)\mathrm{f}^{/}(x)\mathrm{f}^{//}(x)=4\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ **(2)**

(ε1) Να βρείτε το $\mathrm{f}(0)$ και να αποδείξετε ότι η f δεν είναι σταθερή

(ε2) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathrm{f}^{/}(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα ξ

(ε3) Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου

(ε4) Να αποδείξετε ότι $2\xi=\kappa+\rho$

(ε5) Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής του $x^{\nu-1}$, είναι 0 ή 4

(ε6) Αν επιπλέον η ευθεία $(\varepsilon):\mathrm{y}=2x-1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=\rho$,τότε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

107 ΘΕΜΑ

Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $\mathrm{f}:\mathbb{R}\quad\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $(\mathrm{f}\circ\qquad(x)+x$ **(1)** , για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(α) Να λυθεί η εξίσωση $\mathrm{f}(x)=0$

(β) Να αποδείξετε ότι η $\mathrm{f}\circ$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

(γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

(δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

(ε) Να υπολογίσετε(αν υπάρχει) το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))}{x\mathrm{f}(x)}$

Πρόταση

- **Όταν** η συνάρτηση f είναι **γνησίως** αύξουσα σ’ ένα διάστημα Δ ,τότε η συνάρτηση f^{-1} είναι **γνησίως** αύξουσα στο $\mathrm{f}(\Delta)$
- **Όταν** η συνάρτηση f είναι **γνησίως** φθίνουσα σ’ ένα διάστημα Δ ,τότε η συνάρτηση f^{-1} είναι **γνησίως** φθίνουσα στο $\mathrm{f}(\Delta)$

108 ΘΕΜΑ

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\Delta=[0,+\infty)\to\mathbb{R}$

για την οποία ισχύει ότι: $x^2(f\circ$ (x) **(1)**, για κάθε $x\in\Delta$

(α) Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f

(β) Να αποδείξετε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ και το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

(γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x\eta\mu x}$ **(δ)** Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{|\eta\mu x|}$

(ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο Δ

109 ΘΕΜΑ

Δίνεται η μη συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο στο $\Delta=[1,3]$

$f(1)+f(2)=-1,\ 0\in f(\Delta),\ f(1)=f(3)$ και έχει μόνο μια θέση

ελαχίστου και για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει $4f(x)+4=(f^{/}(x))^2$

(ε 1) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι σταθερή

(ε 2) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο σε εσωτερικό σημείο ρ του Δ

(ε 3) Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει μέγιστο σε εσωτερικό σημείο του Δ

(ε 4) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της

(ε 5) Αν επιπλέον η f είναι δύο φορές , τότε να βρείτε τον τύπο της f

110 ΘΕΜΑ

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$, για την οποία

ισχύει ότι: $(f\circ$ $x)=e^x$ **(1)**, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(α) Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης $f\circ$

(β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

(γ) Να αποδείξετε ότι: $f(x)>0$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$

(δ) Να αποδείξετε ότι:Η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει πραγματική ρίζα

(ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

111 ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f, με $\mathrm{f}(x)=\mathrm{f}(-1)x^3-\mathrm{f}(1)x+\mathrm{f}(0)$

$\mathrm{f}(0)\neq\mathrm{f}(1)\neq 0\neq\mathrm{f}(-1)$

Να αποδείξετε ότι

(γ1) $\mathrm{f}(-1)=\mathrm{f}(1)$

(γ2) Υπάρχει $\xi_0\in(-1,1)$, ώστε $3\xi_0^2=1$

(γ3) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(-1,1)$, ώστε $\mathrm{f}'(\xi_1)+\mathrm{f}'(\xi_2)=0$

(γ4) $\xi_1^2+\xi_0^2+\xi_2^2=1$

112 ΘΕΜΑ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $\mathrm{f}:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν

- $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $\mathrm{f}'(x)\geq 2x\mathrm{f}(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

(β) Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{f}(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{f}(x)-1)$,να βρείτε το σύνολο τιμών της f

(γ) Να αποδείξετε ότι : $\mathrm{f}(0)\geq 1$

113 ΘΕΜΑ

Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathrm{f}:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$ και $\mathrm{g}:\mathbb{R} \quad \mathbb{R}$,για τις οποίες ισχύουν $\lim\limits_{\mathrm{y}\to 1}\dfrac{\mathrm{f}(x)-2\mathrm{g}(\mathrm{y})}{\mathrm{y}-1}=-1$ **(1)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\mathrm{f}(x)-\mathrm{g}(\mathrm{y})}{x-1}=1$ **(2)**

$\lim\limits_{x\to 1}\mathrm{f}(x)=\kappa\in\mathbb{R}$ **(3)** $\lim\limits_{\mathrm{y}\to 1}\mathrm{g}(\mathrm{y})=\rho\in\mathbb{R}$ **(4)**

(δ 1) Να αποδείξετε ότι $\kappa=\rho=0$

(δ 2) Αν επιπλέον ισχύει $\mathrm{f}(x)-2\mathrm{g}(\mathrm{y})=x-2\mathrm{y}+1$, για κάθε $x,\mathrm{y}\in\mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι $\mathrm{f}=\mathrm{g}$

114 ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f, με συνεχή παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ ισχύει $\mathrm{f}(x)=\alpha+\beta-x+[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]\mathrm{f}'(x)$

Να αποδείξετε ότι

(ε1) Η f έχει ακρότατα στα άκρα

(ε2) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_0\in(\alpha,\beta)$, ώστε $\mathrm{f}'(\xi_0)=-1$

(ε3) Υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$, με $\xi_1\neq\xi_2$ ώστε $\mathrm{f}'(\xi_1)+\mathrm{f}'(\xi_2)=-2$

(ε4) Υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\rho_1,\rho_2\in(\alpha,\beta)$, με $\rho_1\neq\rho_2$ $\mathrm{f}'(\rho_1)\mathrm{f}'(\rho_2)=1$

115 ΘΕΜΑ

Α Δίνεται η συνάρτηση g, με $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}-\ln x$

(α 1) Να μελετήσετε την g βως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της g

(α 2) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x,\mathrm{y}\in(0,\infty)$ ισχύει

$$g(x\mathrm{y})=g(x)+g(\mathrm{y})+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{\mathrm{y}+1}-\frac{2}{x\mathrm{y}+1}-1$$

Β Έστω συνάρτηση $\mathrm{f}:\Delta=(0,+\infty)$, f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και $\mathrm{f}(x\mathrm{y})-\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(\mathrm{y})=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{2}{\mathrm{y}+1}-\dfrac{2}{x\mathrm{y}+1}-1$ **(1)** για κάθε $x,\mathrm{y}\in\Delta$

(β 1) Να βρείτε το $\mathrm{f}(1)$

(β 2) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(1/x)=0$, για κάθε $x\in\Delta$

(β 3) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{f}\searrow$ στο Δ

Αν επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\mathrm{f}(x)}{x-1}=-\dfrac{1}{2}$, τότε

(β 4) Να αποδείξετε ότι f συνεχής στο Δ

(β 5) Να βρείτε τον τύπο της f

116 ΘΕΜΑ

Έστω $f:\Delta=[1,5]\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο Δ . Αν

$(f(1)-f(2))(f(3)-f(2))>0$ και $(f(3)-f(4))(f(5)-f(4))>0$

τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,5)$

117 ΘΕΜΑ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\quad\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει ότι

$g(y)=e^{2y}f(x)+2e^{y}f'(x)+f''(x)$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ **(1)**

και $g(0)=1$.Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των C_f,C_g και την ευθεία $x=1$

ΘΕΜΑ 118

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x)=2x^2+x+\ln x$

(β1) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f, ως προς τη μονοτονία την κυρτότητα ,να βρείτε το σύνολο τιμών της και να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση **(μονάδες 12)**

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

(β2) Για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει μοναδικός θετικός αριθμός ρ ώστε $f(\rho)=x$ **(μονάδες 03)**

(β3) Η εξίσωση $4x+\dfrac{1}{x}=2e+2+\dfrac{1}{e-1}$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα **(μονάδες 04)**

(β4) $2f(x)+3+\ln 4\le 10x$, για κάθε $x\in(0,\ 1/2]$ και

$2f(x)+3+\ln 4\ge 10x$,για κάθε $x\in[1/2,\ +\infty)$ **(μονάδες 06)**

ΘΕΜΑ 119

Δίνεται η συνάρτηση g , με $g(x)=\begin{cases} 5e^x-x^3-5x+1 & ,x\le 0 \\ 6e^x-2x^3+x^2-6x & ,x>0 \end{cases}$

και η συνάρτηση f , με $f(x)=\begin{cases} e^x-x-1 & ,x\le 0 \\ x^3-x^2 & ,x>0 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι

(γ1) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ **(μονάδες 06)**

(γ2) Η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ **(μονάδες 04)**

(γ3) $4E(\Omega)<3$, όπου $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την γραφική παράσταση $C_{f'}$ της συνάρτησης f' τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$ **(μονάδες 04)**

(γ4) Η F,με $F(x)=f(x)+g(x)$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ **(μονάδες 06)**

(γ5) Η εξίσωση $F(x)=\alpha$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$ **(μονάδες 05)**

ΘΕΜΑ 120

Έστω οι συναρτήσεις f , με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$, και $g:\mathbb{R}\quad\mathbb{R}$

- $g(0)=1,\ g(1)=0$ **(1)**
- $f(0)(f(1)-1)\neq 0$ **(2)**
- $f'(x)\neq 0$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **(3)** και επιπλέον δίνεται ότι

$g(x)=f^4(x)-f^3(x)+2f^2(x)-3f(x)+1$ **(4)** , για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι

(δ1) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(0,1)$,ώστε $g(\rho)=\rho$ **(μονάδες 05)**

(δ2) Υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$, ώστε $g'(\xi_1)g'(\xi_2)=1$ **(μονάδες 05)**

(δ3) $0<f(1)<1<f(0)<2$ **(μονάδες 05)**

(δ4) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ **(μονάδες 03)**

(δ5) Αν επιπλέον ισχύει $4f(1)=3$, τότε $g(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **(μονάδες 07)**

ΘΕΜΑ 121

Έστω συνάρτηση f , με Π.Ο $\mathrm{A}=(0,1)\mathrm{U}(1,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο A $\mathrm{f}(\mathrm{e}^2)=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$ και για κάθε $x\in \mathrm{A}$ ισχύει $\mathrm{f}^{/}(x)=\dfrac{\ln x-2}{\ln^3 x}$

(ε1) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $\mathrm{f}^{/}$

(ε2) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

(ε3) Να βρείτε , αν υπάρχει , το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x\mathrm{f}(x)}$

Για οποια δήποτε απορία μπορείτε

να στέλνετε μηνυμα στο

messeger

ή email στο

haralamposkonstantinou@gmail.com